Inleiding Wiskundige Systeemtheorie voor Informatici (vakkode 156057)

Voorjaar 1998
Herziene versie voorjaar 1999
Tweede herziene versie voorjaar 2000
Derde herziene versie voorjaar 2001
Vierde herziene versie voorjaar 2002
Vijfde herziene versie voorjaar 2003

Arjan van der Schaft

Faculteit der Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente

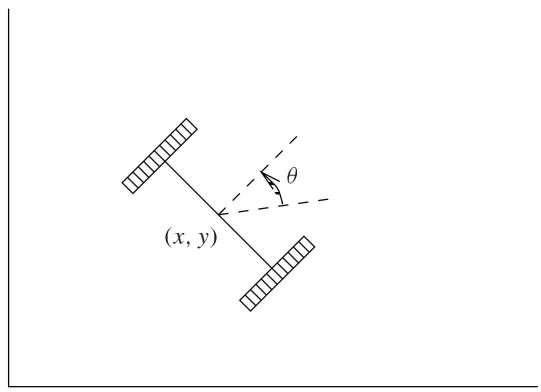
Inhoudsopgave

Voorwoord

Veel verschijnselen in de ons omringende wereld zijn inherent *dynamisch* van aard; d.w.z., ze worden gekarakteriseerd door bepaalde grootheden die niet constant zijn, maar veranderen in de tijd, veelal afhankelijk van elkaar. Eenvoudige voorbeelden zijn een elastische bal die stuitert op een tafel, de valutakoersen van een aantal samenhangende munteenheden, het verwarmingssysteem van een huis dat aan- of afslaat al naar gelang de temperatuur op een thermostaat onder of boven een gewenste waarde komt, of een mobiele robot die zich van A naar B verplaatst. Klassiek voorbeeld van een wiskundig model van dynamische verschijnselen is de wet van Newton, $F = ma$, die uitdrukt hoe de positie q van een deeltje met massa m evolueert in de tijd onder invloed van een kracht F. We kunnen deze wet interpreteren als een verband tussen de kracht F en de positie q, met $a = \frac{d^2q}{dt^2}$ de versnelling van de massa. Ook in de informatica komen we dynamische modellen tegen, zoals eindige automaten of communicerende processen. (Verschil is evenwel dat de tijdsas in deze modellen in eerste instantie niet de “fysische” tijdsas is maar slechts de opeenvolging van gebeurtenissen aangeeft.)

In dit college zullen we ons vooral bezighouden met de dynamica van fysisch-technische systemen; hoewel ook voorbeelden uit andere gebieden niet zullen ontbreken om de reikwijdte van de theorie aan te duiden. Deze systemen zijn veelal *continue-tijd dynamische systemen*, zoals mechanische en/of elektrische systemen, waarvan de dynamica door stelsels *differentiaalvergelijkingen* (zoals in de wet van Newton) wordt beschreven. We zullen ons hierbij richten op de bestudering van dynamische systemen die *interacteren* (of “communiceren”) met hun omgeving. De interactievariabelen van deze systemen worden veelal onderscheiden in *input*variabelen en *output*variabelen, met de betekenis dat de inputvariabelen vrij in te stellen zijn door de omgeving van het systeem, terwijl de outputvariabelen door het systeem vastgelegd worden en dus als de *respons* van het systeem t.o.v. de inputs gezien kunnen worden. De input- of ingangsvariabelen kunnen op hun beurt worden onderscheiden in enerzijds *control-* of regelinputs en anderzijds storinginputs, waarbij de control inputs direct door de mens zijn in te stellen.
Een basisprobleem in de besturing en het ontwerp van dit soort systemen is dat het aantal controlvariabelen meestal veel kleiner is dan het totale aantal variabelen dat het systeem beschrijft. We kunnen daarom het systeem maar *ten dele* beïnvloeden, en we moeten terdege rekening blijven houden met, in ieder geval een deel van, de inwendige dynamica van het systeem. Beschouw als voorbeeld het ontwerp van een flexibel transportvervoer d.m.v. automatisch bestuurde wagentjes met aanhangers. (Denk bijvoorbeeld aan de

bagage-afwikkeling op een vliegveld van check-in balie naar vliegtuig en andersom.) In eerste instantie zullen we een bepaalde strategie dienen te ontwerpen zodanig dat de bagage zo efficiënt mogelijk van een aantal transportbanden naar het juiste vliegtuig wordt vervoerd (en weer terug), waarbij de wagentjes een beperkte bewegingsruimte hebben en botsingen voorkomen dienen te worden. Een geavanceerde strategie hiervoor dient rekening te houden met de *continue tijd dynamica* van de automatisch bestuurde wagentjes. Immers een wagentje-aanhanger combinatie met een gegeven plaats en snelheidsconfiguratie op een bepaald tijdstip kan niet instantaan in een willekeurige richting met willekeurige snelheid worden gestuurd. In het bijzonder dient rekening gehouden te worden met het feit dat de wagentje-aanhanger combinatie een bepaalde traagheid bezit en niet in zijwaartse richting kan worden bestuurd.
Laten we om dit concreet te maken het eenvoudigste model van een aangedreven wagentje bekijken. Beschouw daartoe de dynamica van een vooras (zie Figuur 1)



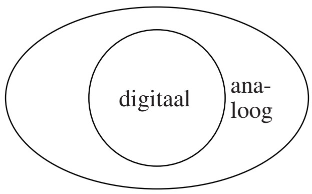
Figuur 1: Wagentje

met (x, y, θ) de plaatscoördinaten van de vooras, v de voorwaartse snelheid, ω de hoeksnelheid, m de massa, I het traagheidsmoment, en u_1 de voorwaartse kracht ("gas geven") en u_2 de stuurkracht. Merk op dat dit zeer eenvoudige systeem beschreven wordt door 5 zogenaamde toestandsvariabelen $(x, y, \theta, v, \omega)$, terwijl er maar 2 regelvariabelen (u_1, u_2) zijn. Eerste probleem in de besturing van dit systeem is de traagheid van het systeem: om x, y en θ te regelen moeten eerst de snelheden v en ω geregeld worden via u_1 en u_2. (Dit probleem van traagheid wordt steeds belangrijker naarmate m en I groter worden – beschouw bijvoorbeeld het soortgelijke probleem om een zeeschip een haven in te loodsen; het is evident dat we met het "doorschiet" karakter van de scheepsdynamica rekening dienen te houden!) Het verschijnsel traagheid is een typische *dynamische* karakteristiek van het systeem.
Neem vervolgens aan dat we het traagheidsprobleem op een bevredigende wijze hebben opgelost, en dat we in feite de snelheden v en ω willekeurig kunnen regelen. Dit geeft

het vereenvoudigde model

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v\cos\theta \\ \dot{y} &= v\sin\theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned}$$

met 3 toestandsvariabelen x, y, θ en 2 ingangsvariabelen v, ω. Omdat het aantal ingangsvariabelen nog steeds kleiner is dan het aantal toestandsvariabelen kunnen we echter nog steeds geen willekeurig traject in de plaatscoördinaten x, y, θ realiseren (immers, we kunnen niet "zijwaarts" sturen). Aan de andere kant kan bewezen worden (en is intuitief duidelijk) dat we het systeem wel van iedere willekeurige beginconfiguratie (x_0, y_0, θ_0) naar iedere willekeurige eindconfiguratie (x_e, y_e, θ_e) kunnen sturen, langs een één of ander pad. De vraagstelling is dus hoe we een "zo goed mogelijk" pad van begin- naar eindconfiguratie kunnen realiseren, in aanmerking nemend de bewegingen van andere wagentjes en de beperkte bewegingsruimte op het vliegveld. Dit is op zich al een niet-triviaal probleem, waarbij de dynamica van de wagentjes een belangrijke factor is.
In het algemeen kunnen we stellen dat in veel toepassingen van de informatica (zeker binnen de fysisch-technische hoek) we met de volgende globale situatie hebben te maken, zie Figuur 2.



Figuur 2: Digitaal–analoog

Een digitaal systeem (micro-processor, computer, computerprogramma) functioneert *binnen* een analoge omgeving, d.w.z. binnen een (fysisch-technisch) systeem met *continue dynamica*. In dit verband spreekt men ook wel van "embedded systems": het digitale systeem is ingebed in een analoge omgeving. Het ontwerp en de besturing van het digitale systeem behoort traditioneel tot het gebied van de informatica, terwijl de bestudering van de analoge omgeving traditioneel tot de natuur- en ingenieurswetenschappen behoort. Het tot stand brengen van een goede aansluiting tussen digitaal systeem en analoge omgeving wordt door sommige informatici wel als één van de belangrijkste uitdagingen van de informatica gezien. In Hoofdstuk 5 van dit dictaat zullen we enkele aspecten hiervan behandelen door de bestudering van eenvoudige zogenaamde hybride systemen; zie ook het vervolgvak "Dynamische Discrete Gebeurtenissen (157020)".

Naast continue tijd dynamica van ingangs-toestands-uitgangssystemen zal in dit vak ook een ander, enigszins complementair, aspect van systemen aan de orde komen. Namelijk, we kunnen een ingangs-toestands-uitgangssysteem ook beschouwen als een operator die *ingangssignalen* transformeert in *uitgangssignalen*. Voor het ontwerp en de analyse van, met name *lineaire*, systemen is dit signaal-theoretische standpunt van groot belang, in het bijzonder indien het problemen van signaal- en informatieoverdracht betreft. Voor een uitgebreidere behandeling van dit onderwerp wordt o.m. verwezen naar het vervolgvak “Analyse van Signaaloverdracht in Communicatie” (157021).

1

Dynamische systemen met ingangen en uitgangen

1.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zal enige standaardterminologie uit de systeemtheorie worden geïntroduceerd. Dit zal worden toegelicht aan de hand van een reeks van voorbeelden uit verschillende gebieden, daarmee het interdisciplinaire karakter van het vak benadrukkend.

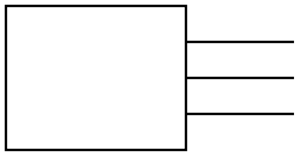
Woorden zoals "systeem", "systeemtheorie" en "system engineering" zijn in uiteenlopende wetenschapsgebieden (dataverwerking, elektrotechniek, economie, management, biologie, theoretische informatica, wiskunde) ingeburgerd geraakt, waarmee de betekenis van deze termen enigszins diffuus is geworden. Daarom zullen we eerst een poging doen om wat duidelijker te omschrijven waar we ons in dit vak mee bezig zullen houden.

Het woord "dynamisch systeem" of kortweg "*systeem*" geeft een object, apparaat of verschijnsel aan waarvan de tijdsevolutie wordt beschreven aan de hand van het verloop van een aantal *variabelen* (meetbare attributen). Deze variabelen zijn veelal reëelwaardig (de positie van een massa in een mechanisch systeem, de stroom door een draad van een elektrisch netwerk, de hoogte van de rentevoet in een model van een nationale economie, etc.), of discreet (de toetsen op een toetsenbord, de positie van een schakelaar: een symbool gelijk aan 0 of 1 corresponderend met "aan' of "uit").

Om het dynamisch gedrag van een systeem te reproduceren en te analyseren zullen we een *wiskundig model* van het systeem beschouwen ,welke, in zekere benadering, de verbanden aangeeft tussen de evolutie van de verschillende variabelen van het systeem. In veel gevallen kan *hetzelfde* "werkelijke" systeem gerelateerd worden aan *verschillende* wiskundige modellen, corresponderend met verschillende compromissen tussen de precisie of beschrijvende kwaliteit van het model en de eenvoud van het model. Ook kan de keuze van het wiskundig model afhangen van welk probleem we voor het systeem willen bekijken.

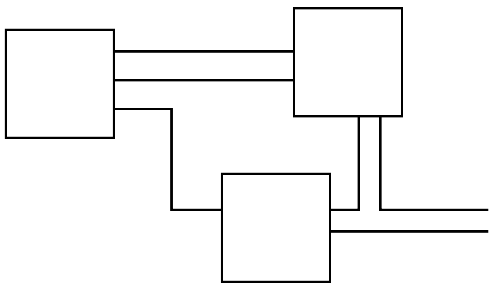
Omdat wiskundige modellen zelf ook systemen zijn (van een meer abstracte aard), is het gebruikelijk om zowel het (fysische) object van studie als een wiskundig model hiervan met het woord "systeem" aan te duiden. Hoewel de systeemtheorie zich ook met de afleiding van wiskundige modellen voor concrete systemen bezighoudt zullen "systemen" voor ons altijd het (geïdealiseerde) wiskundige systeem betekenen.

Essentieel in de systeemtheorie is dat (een deel van) de variabelen van het systeem de relatie van het systeem met de omgeving van het systeem of met andere systemen beschrijft. Deze variabelen worden de interconnectie- of *externe variabelen* genoemd, en de eventuele overige variabelen de *interne variabelen*. Een zinvolle uitbeelding van



Figuur 1.1: Open systeem.

een systeem is (zie Figuur 1.1) een blok met lijnen naar de omgeving, waar de interne variabelen met het blok worden geassocieerd en de externe variabelen met de lijnen. In een zogenaamde *black-box* benadering van het systeem zullen we geen beschrijving kunnen (of willen) geven van wat er in het blok (de zwarte doos) gebeurt, en zal de beschrijving van het systeem alleen de evolutie van de externe variabelen betreffen. In het geval van een *complex* systeem zal het blok op zich weer bestaan uit een aantal *subsystemen* die middels hun externe variabelen met elkaar verbonden zijn (zie Figuur 1.2). In veel



Figuur 1.2: Complex systeem.

gevallen is het nuttig om de externe variabelen in ingangsvariabelen ("inputs") en uitgangsvariabelen ("outputs") te onderscheiden, en daarmee de lijnen van het systeem van pijlen te voorzien zoals in Figuur 1.3. Ingangsvariabelen kunnen door de omgeving van het systeem willekeurig worden ingesteld (zoals de spanning van een spanningsbron van een elektrisch netwerk of het wel of niet indrukken van de toetsen van een toetsenbord), terwijl anderzijds de uitgangsvariabelen worden vastgelegd door de ingangsvariabelen en de interne variabelen (de stroom door de spanningsbron , respectievelijk de symbolen die op het beeldscherm verschijnen). In dit eerste hoofdstuk en in Hoofdstuk 2 zullen wij ons uitsluitend met systemen met ingangs- en uitgangsvariabelen bezighouden, vanwege

Figuur 1.3: Systeem met ingangen en uitgangen.

het grote belang voor toepassingen en omdat zij gemakkelijker te analyseren zijn dan de meer algemene systemen die in Hoofdstuk 3 aan bod komen.

In dynamische systemen speelt het concept "*toestand*" een cruciale rol: in intuitieve termen is de toestand van een systeem op een bepaald tijdstip (het *heden*) de informatie over het *verleden* die nodig is om het *toekomstig* gedrag van het systeem te beschrijven. Toestandsvariabelen vormen het belangrijkste voorbeeld van interne variabelen. Toestandsvariabelen hebben naast deze "informatie-theoretische" interpretatie veelal ook een duidelijke "fysische" interpretatie, zoals we in de voorbeelden zullen zien.

Zoals reeds aangeduid houden we ons vooral bezig met *dynamische* systemen, dat wil zeggen systemen die evolueren in de tijd. Dit impliceert dat wij een zekere *tijdsas* veronderstellen. We zullen ons in dit vak tot de twee meest gangbare keuzen voor de tijdsas beperken, namelijk $T = \mathbb{Z}$, de *discrete* tijdsas, en $T = \mathbb{R}$, de *continue* tijdsas. In het eerste geval beschouwen we de waarden van de systeemvariabelen alleen op discrete, equidistante, tijdstippen (een digitale klok), terwijl in het tweede geval het continue verloop van de systeemvariabelen wordt bijgehouden (met een analoge klok).

1.2 Ingangs-toestands-uitgangssystemen

1.2.1 Ingangs-toestands-uitgangssystemen in discrete tijd

We zullen nu eerst de definitie geven van een ingangs-toestands-uitgangssysteem met *discrete* tijdsas $T = \mathbb{Z}$.

Definitie 1.2.1 (Ingangs-toestands-uitgangssysteem in discrete tijd). Een ingangs-toestands-uitgangssysteem in discrete tijd wordt gegeven door de tijdsas $T = \mathbb{Z}$, een ingangsruimte U, een toestandsruimte X, en een uitgangsruimte Y, benevens een *volgende-toestandsfunctie*

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad u(k) \in U, \quad x(k), x(k+1) \in X, \quad k \in \mathbb{Z},$$

en een *uitgangsfunktie*

$$y(k) = h(x(k), u(k), k), \quad y(k) \in Y, \quad u(k) \in U, \quad x(k) \in X, k \in \mathbb{Z}$$

■

Merk op dat de volgende-toestandsfunktie aangeeft hoe de toestand $x(k)$ op ieder tijdstip k onder invloed van de ingang $u(k)$ op tijdstip k overgaat in de toestand $x(k+1)$ op het tijdstip $k+1$. Deze funktie legt dus de *dynamica* van het systeem vast. De uitgangsfunktie doet niets anders dan de uitgang $y(k)$ op ieder tijdstip k te bepalen als funktie van de toestand en ingang op hetzelfde tijdstip.

Voorbeeld 1.2.2 (parity-checker). Beschouw een ingangsruimte U bestaande uit twee letters a en b, i.e., $U = \{a, b\}$, en beschouw de ruimte U^* bestaande uit alle "woorden" die we kunnen vormen uit de letters a en b. We willen nu een ingangs-toestands-uitgangssysteem construeren dat ons vertelt of er een even of oneven aantal keer de letter a in een woord voorkomt. Onze uitgangsruimte Y bestaat dus uit twee symbolen E en O, staande voor even of oneven.

We introduceren een toestandsruimte met twee elementen x_o, x_e, en we definieren de volgende-toestandsfunktie als volgt:

$$f(x_o, b) = x_o$$

$$f(x_o, a) = x_e$$

$$f(x_e, b) = x_e$$

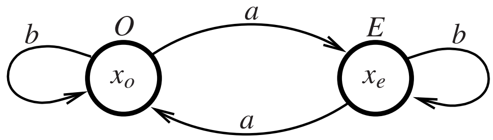
$$f(x_e, a) = x_o$$

terwijl de uitgangsfunktie alleen van x afhangt, en gegeven wordt door

$$h(x_o) = O$$

$$h(x_e) = E$$

Merk op dat zowel f als h niet expliciet van k afhangen. Het is nu gemakkelijk na te gaan dat als we op tijdstip $k = 0$ beginnen in de toestand $x(0) = x_e$, en we voeren vanaf $k = 0$ een woord bestaande uit de letters a en b in, dan zal de uitgang op ieder tijdstip $k \geq 0$ aangeven of er tot op dit tijdstip een even, dan wel een oneven, aantal keer de letter a is voorgekomen. Het zojuist gedefinieerde ingangs-toestands-uitgangssysteem in discrete tijd kan ook handig gerepresenteerd worden d.m.v. de volgende beschrijving als *eindige automaat*, zie Figuur 1.4. ■

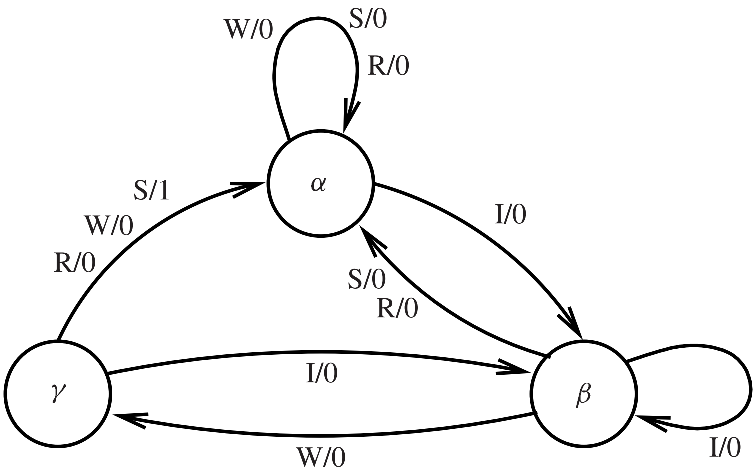


Figuur 1.4: Parity-checker.

Voorbeeld 1.2.3 (rij-detector). De ingangsverzameling U bestaat in dit voorbeeld uit alle symbolen op een toetsenbord. We willen een systeem ontwerpen dat het rijtje IWS detecteert. De uitgangsverzameling is $Y = \{0, 1\}$ en de uitgang dient de waarde 1 aan te nemen iedere keer het rijtje IWS in het ingangsrijtje voorkomt.
We nemen als toestandsruimte de verzameling X met drie elementen α, β, γ. De volgende-toestandsfunktie f wordt door de volgende tabel vastgelegd (verticaal staan de toestanden en horizontaal staan de ingangswaarden waar met R iedere ingangswaarde verschillend van I,W of S wordt bedoeld.)

	I	W	S	R
α	β	α	α	α
β	β	γ	α	α
γ	β	α	α	α

Verder definiëren we de uitgangsfunctie als $h(\gamma, S) = 1$ en 0 elders. We kunnen dit met de eindige automaat van Figuur 1.5 samenvatten, waar de drie toestanden met rondjes staan aangeduid, en waar naast iedere transitiepijl de betreffende ingang/uitgang staat. Indien we het systeem initialiseren in de toestand α (of equivalent, eerst met de



Figuur 1.5: Rijtjesdetector.

ingang R het systeem in toestand α brengen), dan verricht het systeem de gewenste taak en zal na ieder optreden van het ingangsrijtje IWS de uitgang 1 produceren. ■

Voorbeeld 1.2.4 (nationale economie). Een zeer eenvoudig model van een nationale economie is als volgt. We definiëren voor ieder jaar k de volgende grootheden

$$y(k) = \text{ nationaal produkt (in jaar } k)$$

$$c(k) = \text{ consumptie}$$

$$i(k) = \text{ investeringen}$$

$$u(k) = \text{ overheidsuitgaven}$$

Deze grootheden voldoen aan de balansvergelijking

$$y(k) = c(k) + i(k) + u(k)$$

We nemen aan dat de consumptie een vast deel is van het nationale produkt, zodat $c(k) = my(k)$ voor een m met $0 \leq m \leq 1$. Dit levert

$$y(k) = my(k) + i(k) + u(k)$$

ofwel

$$i(k) = (1 - m)y(k) - u(k)$$

We nemen verder aan dat de *groei* van het nationale produkt evenredig is (met factor $r(k)$) met de investeringen. Er geldt dan

$$y(k+1) - y(k) = r(k)i(k) = r(k)(1-m)y(k) - r(k)u(k)$$

ofwel

$$y(k+1) = [1 + r(k)(1-m)]\, y(k) - r(k)u(k) \tag{1.1}$$

Vergelijking (1.1) definieert een discrete-tijd systeem met toestand $y(k)$ en ingang $u(k)$. Als uitgang nemen we $y(k)$ (dus uitgang = toestand). ■

Merk op dat de tijdsas $T = \mathbb{Z}$ in Voorbeelden 1.2.2 en 1.2.3 een iets andere rol speelt dan in Voorbeeld 1.2.4. Inderdaad geven de tijdstippen $1, 2, 3$, enzovoort, in Voorbeelden 1.2.2 en 1.2.3 slechts een *volgorde* aan (tijdstip 1 is eerder dan tijdstip 2, tijdstip 2 is eerder dan tijdstip 3), zonder te refereren naar een fysische tijd zoals in Voorbeeld 1.2.4. Systemen zoals in Voorbeelden 1.2.2 en 1.2.3 worden daarom ook wel *discrete-gebeurtenis*-systemen genoemd. (Er vindt een reeks van gebeurtenissen plaats op opeenvolgende, niet van te voren gespecificeerde, tijdstippen.)

Een tweede belangrijk verschil tussen Voorbeelden 1.2.2 en 1.2.3 enerzijds en Voorbeeld 1.2.4 anderzijds is dat U, X en Y in de eerste twee voorbeelden *eindige* verzamelingen zijn, en in Voorbeeld 1.2.4 *continue* ruimten. Voorbeelden 1.2.2 en 1.2.3 worden ook wel (ingangs-uitgangs) *eindige automaten* genoemd.

1.2.2 Ingangs-toestands-uitgangssystemen in continue tijd

Tweede belangrijke klasse van systemen zijn ingangs-toestands-uitgangssystemen met *continue tijdsas* $T = \mathbb{R}$.

Definitie 1.2.5 (Ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd). Een ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd wordt gegeven door de tijdsas $T = \mathbb{R}$, een ingangsruimte $U = \mathbb{R}^m$, een toestandsruimte $X = \mathbb{R}^n$, en een uitgangsruimte $Y = \mathbb{R}^p$, benevens een *differentiaalvergelijking*

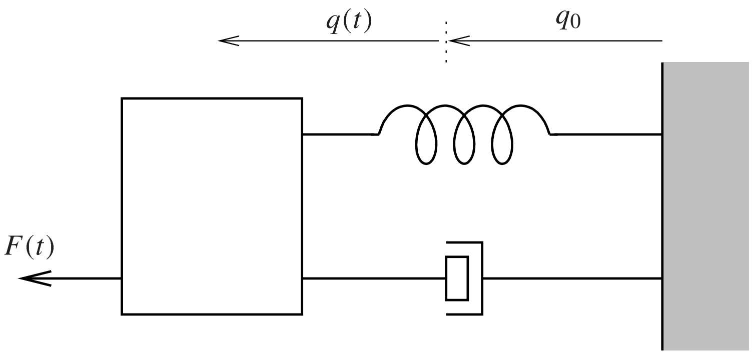
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$$

en een uitgangsfunctie

$$y(t) = h(x(t), u(t), t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}$$

■

Voorbeeld 1.2.6 (Massa-veer-demper systeem). Een massa m beweegt langs een rechte lijn. De massa is verbonden met een veer met veerconstante k. Verder ondervindt de massa een wrijvingskracht die een functie is van de snelheid van de massa. Tevens ondergaat de massa een uitwendige kracht $F(t)$, zie Figuur 1.6 (De wrijving wordt in



Figuur 1.6: Massa-veer-demper systeem.

Figuur 1.6 voorgesteld door een *demper*.) Als uitgang $y(t)$ nemen we de positie $q(t)$ van de massa t.o.v. de rustpositie q_0 van de veer. Volgens de wet van Newton voldoen $q(t)$ en $F(t)$ aan de 2e orde differentiaalvergelijking

$$m\ddot{q}(t) = -kq(t) - r\dot{q}(t) + F(t) \tag{1.2}$$

waarbij we voor de eenvoud de wrijvingskracht *lineair* in $\dot{q}(t)$ hebben verondersteld, d.w.z. gelijk aan $-r\dot{q}(t)$ voor een zekere constante r. Definiëren we nu de *toestand* van het systeem op ieder tijdstip t als

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{1.3}$$

dan kunnen we (1.2) herschrijven als de twee-dimensionale eerste-orde differentiaalvergelijking

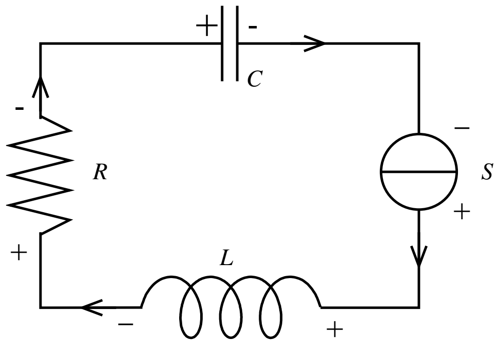
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ -\frac{k}{m}q(t) - \frac{r}{m}\dot{q}(t) + \frac{1}{m}F(t) \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

met ingang $u(t) = F(t)$. De uitgangsfunctie wordt gegeven als de volgende lineaire funktie van de toestand

$$y(t) = [1\ 0]\begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

■

Voorbeeld 1.2.7 (RLC elektrisch netwerk). Beschouw het volgende elektrische netwerk, opgebouwd uit een condensator C, zelfinduktie (spoel) L, weerstand R en spanningsbron S (Figuur 1.7) Laat V_C, V_L, V_R en V de spanningen over C, L, R en S, en



Figuur 1.7: RLC-netwerk.

I_C, I_L, I_R en I de stromen door deze elementen zijn. De spannings-, respectievelijk stroomwetten van Kirchhoff leveren de volgende balansvergelijkingen

$$\begin{aligned} V &= V_L + V_C + V_R \\ I_L &= I_R = I_C = I \end{aligned} \tag{1.6}$$

De constitutieve vergelijkingen van een lineaire condensator, zelfinduktie en weerstand worden gegeven door

$$\begin{aligned} V_C &= \tfrac{1}{C}q, \quad \dot{q} = I_C \\ I_L &= \tfrac{1}{L}\varphi, \quad \dot{\varphi} = V_L \\ V_R &= RI_R \end{aligned} \tag{1.7}$$

voor zekere constanten C, L en R. Hier is q de *lading* van de condensator, en φ de magnetische *flux* van de zelfinduktie. Door als toestandsvector $x(t)$ te kiezen $x(t) = \left[\begin{smallmatrix} q(t) \\ \varphi(t) \end{smallmatrix}\right]$ kunnen we (1.6), (1.7) herschrijven als

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q(t) \\ \\ \varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}\varphi(t) \\ \\ -\frac{1}{C}q(t) - \frac{R}{L}\varphi(t) + V(t) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

hetgeen een differentiaalvergelijking is met ingang $u(t) = V(t)$. Als uitgang kunnen we bijvoorbeeld de stroom I over de spanningsbron nemen, in welk geval

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

of de lading op de condensator, in welk geval

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

We merken op dat de differentiaalvergelijking (1.4) voor het massa-veer-demper systeem in Voorbeeld 1.2.6 veel lijkt op de differentiaalvergelijking (1.8) voor het *RLC* netwerk. Dit wordt nog duidelijker door als toestandsvektor $x(t)$ voor het massa-veer-demper systeem i.p.v. $\left[\begin{smallmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{smallmatrix}\right]$ de vector $\left[\begin{smallmatrix} q(t) \\ p(t) \end{smallmatrix}\right]$, met $p(t) := m\dot{q}(t)$ de *impuls* van de massa, te beschouwen. In dit geval verkrijgen we i.p.v. (1.4)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q(t) \\ \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m}p(t) \\ \\ -kq(t) - \frac{r}{m}p(t) + F(t) \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

■

Deze vergelijkingen (1.11) in q, p en F zijn *exact* gelijk aan de vergelijkingen (1.8) in q, φ en V, voor $m = L, k = \frac{1}{C}, r = R$. We zien dus dat twee fysisch zeer verschillende systemen *wiskundig* equivalent kunnen zijn. Deze wiskundige equivalentie van fysisch verschillende systemen is, zoals we al eerder betoogd hebben, één van de bestaansredenen van de wiskundige systeemtheorie, die zich immers met de studie van *algemene* wiskundige systemen bezighoudt, toepasbaar op systemen voorkomend in *velerlei* wetenschapsgebieden; in dit geval mechanica én elektrische netwerken.

Voorbeeld 1.2.8 (Prooi/roofdier model). Stel x_1 de hoeveelheid prooi (= ansjovis) en x_2 de hoeveelheid roofdier (= zalm). Zij verder u_1 de fractie ansjovis die gevangen wordt per tijdseenheid en u_2 de fractie zalm gevangen per tijdseenheid. Volterra's differentiaalvergelijkingen voor x_1 en x_2 zijn van de vorm

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 - u_1x_1 \\ \dot{x}_2 &= cx_1x_2 - dx_2 - u_2x_2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

met a, b, c, en d positieve constanten. De term ax_1 is afkomstig van de natuurlijke aanwas van ansjovis indien geen zalm of visvangst aanwezig is. Andersom duidt de term $-dx_2$ op de afname in zalmpopulatie indien geen voedsel (= ansjovis) aanwezig is. De termen $-bx_1x_2$ en cx_1x_2 zijn het gevolg van het feit dat zalmen ansjovis eten. Als uitgang kunnen we bijvoorbeeld de hoeveelheid zalm nemen, i.e.

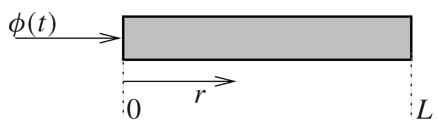
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

Vergelijkingen (1.12), (1.13) definiëren een ingangs-toestands-uitgangssystemen met ingang $u = \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$, toestand $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$ en uitgang $y \in \mathbb{R}$. (Merk op dat in feite de variabelen u_1, u_2, x_1, x_2 en y allen ≥ 0 zijn).

■

In alle voorbeelden van ingangs-toestands-uitgangs-systemen in continue tijd tot nu toe waren de toestandsruimtes X *eindig-dimensionaal*. Bij fysische voorbeelden zoals Voorbeeld 1.2.6 en 1.2.7 is dit veelal een gevolg van *idealisatie*. Zo werd de massa m in Voorbeeld 1.2.6 als puntmassa beschouwd en de veer als massaloos. Verder werden in de constitutieve elementvergelijkingen (1.7) van condensator en zelfinduktie in Voorbeeld 1.2.7 de lading q in één punt geconcentreerd en de magnetische flux φ constant over de ruimte verondersteld. Voor sommige fysische systemen of voor een grotere nauwkeurigheid van de modellen is het echter noodzakelijk om rekening te houden met het feit dat bepaalde grootheden ruimtelijk verdeeld zijn. We noemen de resulterende modellen *verdeelde parameter* (Engels: distributed parameter) systemen, in tegenstelling tot de eindig dimensionele geconcentreerde parameter (Engels: lumped parameter) systemen.

Voorbeeld 1.2.9 (Verwarmde staaf). Een eenvoudig voorbeeld van een verdeelde parametersysteem is een staaf met lengte L, die thermisch geïsoleerd van de omgeving is opgesteld. Met $T(t, r)$ duiden we de temperatuur op tijdstip t en plaats r aan (Figuur 1.8). Aan het linkeruiteinde wordt een warmtestroom $\Phi(t)$ toegevoerd. Als toestand van



Figuur 1.8: Verwarmde staaf.

het systeem op tijdstip t nemen we de gehele functie

$$T(t, \cdot) : [0, L] \to \mathbb{R} \tag{1.14}$$

Uit fysische overwegingen kunnen we aannemen dat de temperatuur "glad" over de staaf varieert, en dus dat de functie in (1.14) oneindig vaak differentieerbaar is. Daarom nemen we als toestandsruimte $X = C^{\infty}([0, L], \mathbb{R})$ (de oneindig-dimensionale ruimte van oneindig vaak differentieerbare functies van $[0, L]$ naar $\mathbb{R}$.) Een warmtebalans op iedere plaats r over een infinitesimaal segment dr van de staaf geeft

$$\frac{\partial T(t,r)}{\partial t} = \frac{\sigma}{\rho C}\frac{\partial^2 T(t,r)}{\partial r^2} \tag{1.15}$$

met σ de warmtegeleidingscoëfficient, ρ de dichtheid en C de soortelijke warmte van de staaf. Aan het linkeruiteinde van de staaf geldt voor de binnenstromende warmte

$$-A\left.\frac{\partial T(t,r)}{\partial r}\right|_{r=0} = \Phi(t) \tag{1.16}$$

met A de doorsnede van de staaf. Omdat het rechteruiteinde geïsoleerd is geldt

$$\left.\frac{\partial T(t,r)}{\partial r}\right|_{r=L} = 0 \tag{1.17}$$

De “differentiaalvergelijking $\dot{x} = f(x, u, t)$” wordt in dit geval dus gegeven door de *partiële differentiaalvergelijking* (1.15), tesamen met de randvoorwaarden (1.16), (1.17). Merk op dat in dit voorbeeld de ingang $u(t) = \Phi(t)$ alleen via de randvoorwaarde (1.16) binnenkomt.

■

1.2.3 Toestandsevolutie

De definitie van een ingangs-toestands-uitgangssysteem in discrete tijd geeft niet alleen aan hoe de toestand $x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, onder invloed van $u(k)$ overgaat in $x(k+1)$, maar legt ook recursief vast wat de toestand $x(j)$ op *ieder* toekomstig tijdstip $j > k$ is, gegeven de ingangen $u(k), u(k+1), \cdots, u(j-1)$. Immers, door twee keer toepassen van de volgende toestandsfunctie verkrijgen we

$$\begin{aligned} x(k+2) &= f(x(k+1), u(k+1), k+1) \\ &= f(f(x(k), u(k), k), u(k+1), k+1) \end{aligned} \tag{1.18}$$

terwijl drie keer toepassen levert

$$\begin{aligned} x(k+3) &= f(x(k+2)), u(k+2), k+2) \\ &= f(f(f(x(k), u(k), k), u(k+1), k+1), u(k+2), k+2)) \end{aligned} \tag{1.19}$$

etcetera. De volgende-toestandsfunktie f bepaalt dus eenduidig een functie

$$\varphi : T_+^2 \times X \times \mathcal{U} \to X \tag{1.20}$$

met

$$\begin{aligned} T_+^2 &= \{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \mid j \geq k\} \\ \mathcal{U} &= \{u(\cdot) : \mathbb{Z} \to U\} \end{aligned} \tag{1.21}$$

zodanig dat

$$x(j) = \varphi(j, k, x(k), u(\cdot)) \tag{1.22}$$

aangevend hoe de toestand $x(k)$ overgaat in de toestand $x(j)$ onder invloed van de toegepaste ingangsfunctie $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. De functie φ wordt de *toestandsevolutiefunctie* van het ingangs-toestands-uitgangssysteem genoemd. Zo kunnen we bijvoorbeeld (1.18) en (1.19) ook samenvatten als

$$x(k+2) = \varphi(k+2, k, x(k), u(\cdot)) = f(f(x(k), u(k), k), u(k+1), k+1)$$

respectievelijk

$$x(k+3) = \varphi(k+3, k, x(k), u(\cdot)) =$$

$$f(f(f(x(k), u(k), k), u(k+1), k+1), u(k+1), k+1), u(k+2), k+2)$$

Merk op dat in feite de toestandsevolutiefunctie $\varphi(j, k, x(k), u(\cdot))$ niet van de *gehele* ingangsfunctie $u(\cdot) : \mathbb{Z} \to U$ afhangt, maar slechts van de waarden $u(k)$, $u(k+1), \cdots, u(j-1)$. Dit formaliseren we in de volgende eigenschap van φ :

1. Indien voor $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}$ geldt

   $$u_1(\ell) = u_2(\ell), \quad k \leq \ell < j$$

   dan geldt

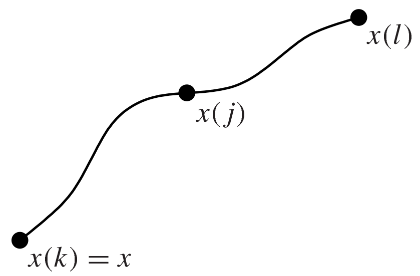
   $$\varphi(k, j, x, u_1(\cdot)) = \varphi(k, j, x, u_2(\cdot)), \text{ voor alle } x \in \mathcal{X}$$

Een tweede essentiële eigenschap van φ die rechtstreeks uit de recursieve definitie volgt is

2. $$\varphi(\ell, j, \varphi(j, k, x, u(\cdot)), u(\cdot)) = \varphi(\ell, k, x, u(\cdot))$$

   voor elke $\ell \geq j \geq k \in \mathbb{Z}$, en alle $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ en $x \in X$. Deze eigenschap kan het best aan de hand van een plaatje worden toegelicht; zie Figuur 1.9.

Verder voldoet φ nog aan de "triviale" eigenschap



Figuur 1.9: Toestandsovergangen.

3.
$$\varphi(k, k, x, u(\cdot)) = x, \quad \forall x \in X, \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}, \forall k$$

Voor de volledigheid merken we tenslotte nog op dat andersom de volgende-toestandsfunctie f rechtstreeks te verkrijgen is uit de toestandsevolutiefunctie φ middels het verband

$$f(x, u, k) = \varphi(k+1, k, u(\cdot)), \text{met } u(k) = u. \tag{1.23}$$

De betekenis van de vergelijkingen van een *ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t), \quad y \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{1.24}$$

is a priori minder eenduidig dan in het discrete-tijd geval. Inderdaad moeten we om de vergelijkingen $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ te interpreteren een *oplossingsconcept* voor deze vergelijkingen definiëren. Het oplossingsconcept dat we zullen gebruiken is het gebruikelijke oplossingsconcept voor (stelsels) differentiaalvergelijkingen: een continue, stuksgewijs differentieerbare functie $\bar{x} : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ is een oplossing van

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u}(t), t), \quad t \in [t_0, \infty) \tag{1.25}$$

voor een gegeven stuksgewijs continue ingangsfunctie $\bar{u} : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, indien

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \tag{1.26}$$

op alle tijdstippen $t \in \mathbb{R}$ uitgezonderd de discontinuiteitspunten van $\bar{u}(\cdot)$. Uit de theorie der differentiaalvergelijkingen weten we dat het stelsel differentiaalvergelijkingen (1.25) onder zekere voorwaarden op de functie f een eenduidige oplossing heeft op het interval $[t_0, \infty)$ voor *elke* beginvoorwaarde $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. *We zullen in het vervolg steeds* *aannemen dat f aan deze voorwaarden (die we hier niet specificeren) voldoet.* De ruimte van stuksgewijs continue ingangsfuncties van $\mathbb{R}$ naar $U = \mathbb{R}^m$ zullen we aanduiden met $\mathcal{U}$ (een deelverzameling van de ruimte van *alle* functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}^n$). We verkrijgen dan dus voor iedere $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ een welgedefinieerde afbeelding

$$\varphi_{\bar{u}(\cdot)} : T_+^2 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

met

$$T_+^2 = \{(t_1, t_0) \in \mathbb{R}^2 \mid t_1 \geq t_0\} \tag{1.27}$$

gedefinieerd als

$$\varphi_{\bar{u}(\cdot)}(t_1, t_0, x_0) \quad = \quad \begin{array}{l} \text{oplossing op tijdstip } t_1 \text{ van (1.25) met} \\ \text{beginvoorwaarde } x(t_0) = x_0 \end{array} \tag{1.28}$$

Evenals in het discrete-tijd geval verkrijgen we dus een *toestandsevolutiefunctie*

$$\varphi : T_+^2 \times X \times \mathcal{U} \to X \tag{1.29}$$

met $X = \mathbb{R}^n$, gegeven door

$$\varphi(t_1, t_0, x_0, u(\cdot)) = \varphi_{u(\cdot)}(t_1, t_0, x_0) \tag{1.30}$$

Het is direkt na te gaan dat φ aan dezelfde eigenschappen 1, 2 en 3 als in het discrete-tijd geval voldoet:

1. $u_1(t) = u_2(t), t \in [t_0, t_1) \Rightarrow \varphi(t_1, t_0, x, u_1(\cdot)) = \varphi(t_1, t_0, x, u_2(\cdot))$
voor alle x, en alle $t_1 \geq t_0$.

2. $\varphi(t_2, t_1, \varphi(t_1, t_0, x, u(\cdot)), u(\cdot)) = \varphi(t_2, t_0, x, u(\cdot))$
voor alle x, en alle $t_2 \geq t_1 \geq t_0$, en alle $u(\cdot)$

3. $\varphi(t, t, x, u(\cdot)) = x$,
voor alle x, t en $u(\cdot)$.

Andersom kan uit de toestandsevolutiefunctie φ de differentiaalvergelijking $\dot{x} = f(x, u, t)$ gereconstrueerd worden door middel van de limiet-overgang

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\varphi(t + h, t, x, u(\cdot)) - x}{h} \right) = f(x, u(t), t) \tag{1.31}$$

Later in dit hoofdstuk zullen we aangeven hoe we voor een specifieke klasse differentiaalvergelijkingen $\dot{x} = f(x, u, t)$, namelijk de *lineaire* differentiaalvergelijkingen, de toestandsevolutiefunctie φ *expliciet* kunnen bepalen. Voor niet-lineaire differentiaalvergelijkingen is het i.h.a. *niet* mogelijk om een expliciete uitdrukking voor φ te geven.

1.2.4 Het begrip "toestand"

Een belangrijk gevolg van Eigenschappen 1, 2 en 3 van een toestandsevolutiefunctie is dat de *toekomstige* toestand volledig bepaald wordt door de *huidige* toestand plus de *huidige* en *toekomstige* ingang. Omdat de uitgang op ieder tijdstip een functie is van de toestand en de ingang op dit tijdstip is dus ook de *huidige* en *toekomstige* uitgang volledig bepaald door de *huidige* toestand plus de *toekomstige* ingang. De toestand vormt dus het *geheugen* van het systeem ("alle kennis over het *verleden* van het systeem die relevant is voor de *toekomst* van het systeem is opgeslagen in de *huidige* toestand"). Naast deze "informatie-theoretische" interpretatie van het begrip toestand, heeft de toestand van een systeem vaak ook een *fysische* betekenis. In veel fysische systemen vormt de *verdeling van de energie* over het systeem de toestand van het systeem. Dit hangt nauw samen met het feit dat fysische systemen veelal opgevat kunnen worden als een interconnectie van energie-opslaande subsystemen die met elkaar interacteren d.m.v. energiestromen. Zo is in Voorbeeld 1.2.6 de totale energie van het systeem gegeven door

$$E = \frac{1}{2}kq^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}^2$$

met $\frac{1}{2}kq^2$ de potentiële energie opgeslagen in de veer en $\frac{1}{2}m\dot{q}^2$ de kinetische energie "gedragen door" de massa m. De verdeling van de totale energie over "veer en massa" wordt derhalve gegeven door de toestand $x(t) = \left[\begin{smallmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{smallmatrix}\right]$. Analoog is in Voorbeeld 1.2.7 de totale energie van het systeem de som van de elektrische energie $\frac{1}{2C}q^2$ opgeslagen in de condensator en de magnetische energie $\frac{1}{2L}\varphi^2$ opgeslagen in de zelfinduktie, en "dus" vormt de vector $\left[\begin{smallmatrix} q(t) \\ \varphi(t) \end{smallmatrix}\right]$ een toestand voor het totale systeem. (Merk op dat in de weerstand R, evenals in de demper in Voorbeeld 1.2.6 geen energie wordt opgeslagen; hier wordt alleen energie *gedissipeerd*.)

Het is duidelijk dat de keuze van de toestandsgrootheden in het algemeen niet uniek is. Zo hebben we al gezien dat we in plaats van de toestandsvector $\left[\begin{smallmatrix} q \\ \dot{q} \end{smallmatrix}\right]$ in Voorbeeld 1.2.6 net zo goed de toestandsvector $\left[\begin{smallmatrix} q \\ p \end{smallmatrix}\right]$ kunnen nemen. In Voorbeeld 1.2.7 kan men i.p.v. de magnetische flux φ ook de stroom I_L als toestandsvariabele nemen, omdat wegens $\varphi = LI_L$ de flux en de stroom in 1-1 verband staan; hetzelfde geldt voor de lading q en de spanning V_C over de condensator. In het algemeen kan men een willekeurige bijectieve transformatie op de toestandsvector toepassen; al zijn vanuit fysisch standpunt meestal een beperkt aantal toestandskeuzes natuurlijk.

Behalve bijectieve transformaties (we komen hier later op terug) kunnen we ook altijd de toestandsvector *uitbreiden*. Zo kunnen we in Voorbeeld 1.2.6 als toestand ook de 3-dimensionale vektor $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ nemen. Meestal streven we er echter naar de toestand van een systeem zo "klein" mogelijk te houden; dit aspect van "minimaliteit" zal later nog aan de orde komen.

1.3 Tijdsinvariantie en lineariteit

We zullen nu twee belangrijke systeemeigenschappen definiëren; de meeste systemen die in dit dictaat aan de orde zullen komen hebben deze beide eigenschappen.

Definitie 1.3.1 (Tijdsinvariantie). Een ingangs-toestands-uitgangssysteem in discrete-tijd

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & f(x(k), u(k), k) \\ y(k) & = & h(x(k), u(k), k) \end{array}, k \in \mathbb{Z}$$

is *tijdsinvariant* indien f en h niet expliciet van k afhangen; d.w.z.

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & f(x(k), u(k)) \\ y(k) & = & h(x(k), u(k)) \end{array}, k \in \mathbb{Z} \tag{1.32}$$

Een ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue-tijd

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t), t) \\ y(t) & = & h(x(t), u(t), t) \end{array}, t \in \mathbb{R}$$

is *tijdsinvariant* indien f en h niet expliciet van t afhangen, d.w.z.

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ y(t) & = & h(x(t), u(t)) \end{array}, t \in \mathbb{R} \tag{1.33}$$

■

Voorbeeld 1.3.2. Voorbeelden 1.2.2 en 1.2.3 zijn tijdsinvariant, Voorbeeld 1.2.4 is tijdsinvariant indien $r(k)$ *constant* is, terwijl Voorbeelden 1.2.6 tot en met 1.2.9 allen tijdsinvariant zijn. ■

De eigenschap van tijdsinvariantie wordt vooral duidelijk indien we naar de toestandsevolutiefunctie φ kijken. Beschouw het continue-tijd geval (discrete-tijd is analoog), en definieer de *verschuivingsoperatoren*

$$S_\tau : \mathcal{U} \to \mathcal{U}, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

door

$$(S_\tau u)(t) = u(t+\tau), \quad u \in \mathcal{U} \tag{1.34}$$

Propositie 1.3.3. De toestandsevolutiefunctie φ van een tijdsinvariant ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd voldoet aan

$$\varphi(t_1, t_0, x_0, S_\tau u) = \varphi(t_1 + \tau, t_0 + \tau, x_0, u) \tag{1.35}$$

voor elke $\tau \in \mathbb{R}$, en alle $u \in \mathcal{U}$, $x_0 \in X$ en $t_1, t_0 \in \mathbb{R}$.

Bewijs. Zij $u \in \mathcal{U}$. Zij $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = f(x, S_\tau u), \quad x(t_0) = x_0$$

Dan voldoet $x(t + \tau)$, $t \in \mathbb{R}$, aan de differentiaalvergelijking

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(t_0 + \tau) = x_0$$

Dus is voor elke $t_1 \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{S_\tau u}(t_1, t_0, x_0) = \varphi(t_1 + \tau, t_0 + \tau, x_0)$$

■

Eigenschap (1.35) laat zich nog intrinsieker weergeven door op te merken dat als $u(t), x(t), t \in \mathbb{R}$, voldoen aan de differentiaalvergelijking $\dot{x} = f(x, u)$ dat dan volgens (1.35) ook $(S_\tau u)(t)$, $(S_\tau x)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, aan deze differentiaalvergelijking voldoen (waarbij we $S_\tau x$ net zo definiëren als in (1.34)). Wegens $y = h(x, u)$, geldt dus voor alle $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & u(t), x(t), y(t), t \in \mathbb{R}, \quad \text{voldoen aan (1.33)} \\ & \Rightarrow (S_\tau u)(t), (S_\tau x)(t), (S_\tau y)(t), t \in \mathbb{R}, \quad \text{voldoen aan (1.33)} \end{aligned} \tag{1.36}$$

Dus tijdsinvariantie betekent dat *de verzameling van oplossingen van* (1.33) invariant is onder iedere verschuivingsoperator S_τ, $\tau \in \mathbb{R}$. Meer informeel kunnen we zeggen dat tijdsinvariantie betekent dat de *absolute* tijdstippen niet relevant zijn, maar alleen tijds*verschillen*.

Definitie 1.3.4 (Lineariteit). Een ingangs-toestands-uitgangssysteem in discrete tijd

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= h(x(k), u(k), k) \end{aligned}\right., k \in \mathbb{Z},$$

is *lineair* indien X, U en Y eindig-dimensionale lineaire ruimtes zijn, en f en h *lineaire* functies zijn van $x(k)$ en $u(k)$, d.w.z., er bestaan matrices $A(k), B(k), C(k), D(k)$ zodanig dat

$$\left.\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned}\right., k \in \mathbb{Z},$$

Een ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t), t) \\ y(k) & = & h(x(t), u(t), t) \end{array}, \quad t \in \mathbb{R},$$

is lineair indien X, U, Y eindig-dimensionale lineaire ruimtes zijn, en f en h lineair zijn, d.w.z.

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) & = & C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{array}, \quad t \in \mathbb{R},$$

In het vervolg zullen we altijd aannemen dat $X = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$ en $Y = \mathbb{R}^p$, en derhalve dat $A(k)$, $A(t)$ $n \times n$ matrices, $B(k)$, $B(t)$ $n \times m$ matrices, $C(k)$, $C(t)$ $p \times n$ matrices en $D(k)$, $D(t)$ $p \times m$ matrices zijn. ■

Voorbeeld 1.3.5. Voorbeeld 1.2.4 is lineair, en Voorbeelden 1.2.6, 1.2.7 zijn lineair. Voorbeeld 1.2.8 is een typisch voorbeeld van een *niet-lineair* systeem (let op de *producten* x_1, x_2 en u_1x_1, u_2x_2). ■

Een intrinsieke interpretatie van de eigenschap van lineariteit kan weer gegeven worden door de toestandsevolutiefunctie φ te beschouwen. We zullen ons beperken tot het continue-tijd geval (het discrete-tijd geval is volledig analoog, zie Opgave 1.1).
Eerst merken we op dat, omdat U een lineaire ruimte is, ook $\mathcal{U}$ een lineaire ruimte wordt door te definiëren

$$u_1, u_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow (u_1 + u_2)(t) := u_1(t) + u_2(t), t \in \mathbb{R},$$

$$u \in \mathcal{U} \Rightarrow (\lambda u)(t) = \lambda u(t), t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Propositie 1.3.6. Beschouw een lineair ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) & = & C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p \tag{1.37}$$

De toestandsevolutiefunctie φ voldoet aan:

1. $\varphi(t_1, t_0, x_{01} + x_{02}, u_1 + u_2) = \varphi(t_1, t_0, x_{01}, u_1) + \varphi(t_1, t_0, x_{02}, u_2)$
2. $\varphi(t_1, t_0, \lambda x_0, \lambda u) = \lambda\varphi(t_1, t_0, x_0, u)$

voor alle $t_1 \geq t_0 \in \mathbb{R}$, $x_{01}, x_{02}, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2, u \in \mathcal{U}$ en alle $\lambda \in \mathbb{R}$. (Dus $\varphi(t_1, t_0, x_0, u)$ is gezamenlijk lineair in x_0 en u).

Bewijs. Zij $\varphi(t, t_0, x_{01}, u_1)$ de oplossing op tijdstip t van

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u_1(t), \quad x(t_0) = x_{01}$$

en zij $\varphi(t, t_0, x_{02}, u_2)$ de oplossing op tijdstip t van

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u_2(t), \quad x(t_0) = x_{02}$$

Dan geldt

$$\tfrac{d\varphi(t,t_0,x_{01},u_1)}{dt} = A(t)\varphi(t, t_0, x_{02}, u_1) + B(t)u_1(t)$$

$$\tfrac{d\varphi(t,t_0,x_{02},u_2)}{dt} = A(t)\varphi(t, t_0, x_{02}, u_2) + B(t)u_2(t)$$

en dus door optelling

$$\tfrac{d}{dt}(\varphi(t, t_0, x_{01}, u_1) + \varphi(t, t_0, x_{02}, u_2)) =$$

$$A(t)(\varphi(t, t_0, x_{01}, u_1) + \varphi(t, t_0, x_{02}u_2)) + B(t)(u_1(t) + u_2(t))$$

terwijl $\left[\varphi(t_0, t_0, x_{01}, u_1) + \varphi(t_0, t_0, x_{02}, u_2)\right] = x_{01} + x_{02}$. Derhalve is de eenduidige oplossing $\varphi(t, t_0, x_{01} + x_{02}, u_1 + u_2)$ van

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)(u_1(t) + u_2(t)), x(t_0) = x_{01} + x_{02}$$

gelijk aan $\varphi(t, t_0, x_{01}, u_1) + \varphi(t, t_0, x_{02}, u_2)$, en eigenschap 1 volgt. Het bewijs van eigenschap 2 volgt analoog. ∎

Omdat de uitgang $y(t)$ van een lineair ingangs-toestands-uitgangssysteem met toestandsevolutiefunctie $\varphi(t, t_0, x_0, u)$ gegeven wordt door

$$y(t) = C(t)\varphi(t, t_0, x_0, u) + D(t)u(t)$$

is wegens eigenschap 1 van φ de uitgang $y(t)$, $t \geq t_0$, tengevolge van begintoestand $x_{01} + x_{02}$ op tijdstip t_0 en ingang $u_1 + u_2$ gelijk aan $y_1(t) + y_2(t)$, met $y_1(t)$, respectievelijk $y_2(t)$, de uitgang tengevolge van begintoestand x_{01} op $t = t_0$ en ingang u_1, respectievelijk begintoestand x_{02} op $t = t_0$ en ingang u_2. Verder geldt dat indien $y(t)$ de uitgang is ten gevolge van toestand x_0 op tijdstip t_0 en ingang u, dat de uitgang ten gevolge van toestand λx_0 op tijdstip t_0 en ingang λu, gelijk is aan $\lambda y(t)$. We concluderen derhalve dat in een lineair systeem niet alleen de toestandsevolutiefunctie lineair is, maar ook het verband tussen begintoestand en ingangs-functie enerzijds en uitgangsfunctie anderzijds lineair is (zie ook Opgave 1.2).

1.3.1 Linearisatie van niet-lineaire systemen

Lineaire systemen zijn van zeer veel belang omdat ze, (a) wiskundig gezien gemakkelijk te behandelen zijn (zie de theorie in Hoofdstuk 2), (b) redelijk veel systemen (bij benadering) lineair te modelleren zijn, en omdat, (c) niet-lineaire systemen "lokaal" te benaderen zijn door lineaire systemen.
Om duidelijk te maken wat we met (c) bedoelen beschouwen we een algemeen (niet-lineair) ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd (discrete tijd verloopt weer analoog):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= h(x,u), \quad y \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{1.38}$$

Laat $\bar{u}(\cdot), \bar{x}(\cdot)$ en $\bar{y}(\cdot)$ een oplossing van (1.38), dus

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ \bar{y}(t) &= h(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \end{aligned}\right. \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}. \tag{1.39}$$

Beschouw nu een ander oplossingsdrietal $u(\cdot), x(\cdot), y(\cdot)$ dat we ten opzichte van $\bar{u}(\cdot), \bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot)$ schrijven als

$$\begin{aligned} u(t) &= \bar{u}(t) + v(t) \\ x(t) &= \bar{x}(t) + z(t) \\ y(t) &= \bar{y}(t) + w(t) \end{aligned} \tag{1.40}$$

Invullen van (1.40) in (1.38) geeft

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) + \dot{z}(t) &= f(\bar{x}(t) + z(t), \bar{u}(t) + v(t)) \\ \bar{y}(t) + w(t) &= h(\bar{x}(t) + z(t), \bar{u}(t) + v(t)) \end{aligned} \tag{1.41}$$

We nemen nu aan dat $v(t)$ en $z(t)$ zo klein zijn dat de Taylorreeks om $\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{y}(t)$ van de rechterleden van (1.41) tot en met de lineaire termen een goede benadering vormt, d.w.z.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}(t) + z(t), \bar{u}(t) + v(t)) &\simeq f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))z(t) \\ &+ \tfrac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))v(t) \\ h(\bar{x}(t) + z(t), \bar{u}(t) + v(t)) &\simeq h(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \tfrac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))z(t) \\ &+ \tfrac{\partial h}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))v(t) \end{aligned} \tag{1.42}$$

met

$$\begin{aligned}
A(t) &:= \tfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad n \times n \\
B(t) &:= \tfrac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad n \times m \\
C(t) &:= \tfrac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad p \times n \\
D(t) &:= \tfrac{\partial h}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \quad p \times m
\end{aligned}$$

de matrices van partiële afgeleiden van

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix},$$

geëvalueerd in $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$. Dus het (i, j)-de element van de matrix $A(t)$ is gelijk aan $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t),\ i, j = 1, \cdots, n$, het (i, j)-de element van $B(t)$ is gelijk aan $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t),\ i = 1, \cdots, n,\ \ j = 1, \cdots, m$, enzovoort. Invullen van (1.42) in (1.41), en gebruikmaken van (1.39), levert dan (na vervanging van het “$\simeq$ teken” door een *exact* “= teken”)

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= A(t)z(t) + B(t)v(t) \\
w(t) &= C(t)z(t) + D(t)v(t)
\end{aligned} \tag{1.43}$$

We hebben dus, bij benadering, een *lineair* systeem verkregen met ingang $v(t) \in \mathbb{R}^m$, toestand $z(t) \in \mathbb{R}^n$ en uitgang $w(t) \in \mathbb{R}^p$. Dit systeem vormt voor “kleine” $v(t)$ en $z(t)$ een goede benadering van het oorspronkelijke niet-lineaire systeem (1.38) *in de buurt* van de oplossing $\bar{u}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t), t \in \mathbb{R}$. We noemen (1.43) de *linearisatie* van (1.38) *langs de oplossing* $\bar{u}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)$.

Een belangrijk speciaal geval van een oplossing $\bar{u}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)$ is een *evenwichtsoplossing*.

Propositie 1.3.7. Zij $\bar{u} \in \mathbb{R}^m, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{y} \in \mathbb{R}^p$ zodanig dat

$$\begin{aligned}
f(\bar{x}, \bar{u}) &= 0 \\
h(\bar{x}, \bar{u}) &= \bar{y}
\end{aligned}$$

Dan zijn de *constante* functies

$$\bar{u}(t) = \bar{u}, \quad \bar{x}(t) = \bar{x}, \quad \bar{y}(t) = \bar{y}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.44}$$

een oplossing van (1.38). Het tripel $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{y})$ wordt een *evenwichtspunt* genoemd, en de oplossing (1.44) wordt een *evenwichtsoplossing* genoemd.

Bewijs. Omdat $\bar{x}(t) = \bar{x}$ constant is geldt $\dot{\bar{x}}(t) = 0$, en dus volgt uit $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ dat $\bar{u}(t) = \bar{u}, \bar{x}(t) = \bar{x}$ een oplossing is van $\dot{x} = f(x, u)$. Verder geldt $h(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \bar{y}(t)$. ∎

Voorbeeld 1.3.8. Beschouw het prooi/roofdier model uit Voorbeeld 1.2.8

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, u_1, u_2) = ax_1 - bx_1x_2 - u_1x_1 \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u_1, u_2) = cx_1x_2 - dx_2 - u_2x_2 \\
y &= h(x_1, x_2, u_1, u_2) = x_2
\end{aligned}
\tag{1.45}
$$

en beschouw de evenwichtsoplossing $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_2(t) = 0, \bar{x}_1(t) = \frac{d}{c}, \bar{x}_2(t) = \frac{a}{b}, \bar{y}(t) = \frac{a}{b}$. Linearisatie van (1.45) in deze evenwichtsoplossing levert het lineaire systeem

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{d}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\
w &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

De oplossingen van (1.45) in de buurt van de bovenstaande evenwichtsoplossing zijn derhalve van de vorm $u_1(t) = v_1(t), u_2(t) = v_2(t), x_1(t) = \frac{d}{c} + z_1(t), x_2(t) = \frac{a}{b} + z_2(t), y(t) = \frac{a}{b} + w(t)$, met $v_1(t), v_2(t), z_1(t), z_2(t)$ en $w(t)$ oplossingen van (1.46). Merk op dat de linearisatie (1.46) *tijdsinvariant* is; dit wordt veroorzaakt door het feit dat het oorspronkelijke niet-lineaire systeem (1.45) tijdsinvariant is *en* de linearisatie plaats vindt in een *constante* oplossing. ∎

1.3.2 Ingangs-uitgangsoperatoren

Tenslotte merken we op dat het verband tussen ingangssignalen en uitgangssignalen van een ingangs-toestands-uitgangssysteem ook altijd *zonder* tussenkomst van de toestands-oplossingen kan worden beschreven. Beschouw een ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd (discrete tijd kan weer analoog worden behandeld)

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x, u, t), \quad x \in X, u \in U \\
y &= h(x, u, t), \quad y \in Y
\end{aligned}
$$

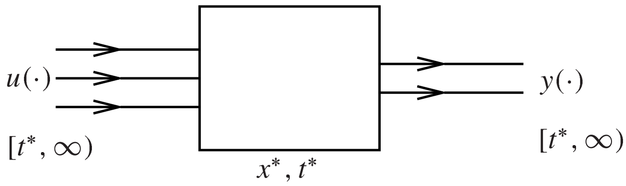
en fixeer een begintoestand x^* op tijdstip t^*. Zij $\varphi(t, t^*, x^*, u)$ de bijbehorende toe-standsevolutiefunctie, dan wordt het verband tussen ingangssignalen $u : [t^*, \infty) \to U$ en uitgangssignalen $y : [t^*, \infty) \to Y$ gegeven door

$$
\begin{aligned}
y(t) &= h(\varphi(t, t^*, x^*, u), u(t), t), \quad t \geq t^* \\
&=: \left[F_{x^*,t^*}(u)\right](t)
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

Merk op dat tengevolge van Eigenschap 1 van een toestands-evolutiefunctie de operator F_{x^*,t^*} de volgende eigenschap heeft

$$u_1(t) = u_2(t),\, t \in [t^*, t_1] \Rightarrow \left[F_{x^*,t^*}(u_1)\right](t) = \left[F_{x^*,t^*}(u_2)\right](t),\, t \in [t^*, t_1] \quad (1.48)$$

Operatoren die aan (1.48) voldoen worden wel *causale* ingangs-uitgangs operatoren genoemd. (Vergelijking (1.48) impliceert dat de uitgang $y(t)$ *niet* van de ingangswaarden $u(\tau)$ voor $\tau > t$ afhangt.) Voor iedere begintoestand x^* op t^* verkrijgen we dus een (causale) *operator* F_{x^*,t^*} van de ingangssignalen op $[t^*, \infty)$ naar de uitgangssignalen op hetzelfde tijdsinterval, zie Figuur 1.10. Een ingangs-toestands-uitgangssysteem kan dus



Figuur 1.10: Ingangs-uitgangsoperator F_{x^*,t^*}.

ook worden beschouwd als een "apparaat" dat (afhankelijk van de begintoestand x^* en begintijdstip t^*) de ingangssignalen *transformeert* in uitgangssignalen. Dit signaaltheoretische standpunt is vooral voor *lineaire* systemen van groot belang (zie Hoofdstuk 2).

1.4 Samenvatting van Hoofdstuk 1

Ingangs-toestands-uitgangssystemen in discrete en in continue tijd zijn gedefiniëerd. De huidige *toestand* van het systeem tesamen met de toekomstige ingangsfunctie bepaalt de evolutie van het systeem. *Tijdsinvariante* systemen zijn systemen waarvoor de relaties tussen de ingangs-, toestands-, en uitgangs-variabelen niet veranderen in de tijd. Voor *lineaire* systemen geldt dat een lineaire combinatie van oplossingen weer een nieuwe oplossing van het systeem is. Niet-lineaire systemen kunnen langs oplossingen benaderd worden met lineaire systemen.

2

Lineaire tijdsinvariante ingangs-toestands-uitgangssystemen

2.1 Dynamica van lineaire continue tijd systemen

In dit hoofdstuk beschouwen we *lineaire tijdsinvariante* ingangs-toestands-uitgangs systemen in continue tijd

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \\
y &= Cx + Du, \quad y \in \mathbb{R}^p,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

met A een $n \times n$ matrix, B een $n \times m$ matrix, C een $p \times n$ matrix en D een $p \times m$ matrix (allen met reëelwaardige elementen). Aan het eind van het hoofdstuk zullen we kort de corresponderende theorie voor het discrete tijd geval bespreken.
Uit de theorie der differentiaalvergelijkingen volgt dat het n-dimensionale stelsel differentiaalvergelijkingen

$$
\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.2}
$$

een eenduidige oplossing heeft voor iedere $x_0 \in \mathbb{R}^n$ en ieder stuksgewijs continu ingangssignaal $u : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^m$. We zullen nu aangeven hoe we deze oplossing daadwerkelijk kunnen bepalen.
We beschouwen eerst de situatie voor $u(t) \equiv 0, t \geq t_0$, dat wil zeggen het *homogene* stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$
\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.3}
$$

In analogie met de Taylorreeks van de exponentiële functie

$$
e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots
$$

definiëren we de *matrix* exponentiële functie van een $n \times n$ matrix A als de volgende reeks van $n \times n$ matrices

$$e^A := I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \tag{2.4}$$

met I_n de $n \times n$ eenheidsmatrix. Er kan worden aangetoond dat de reeks in (2.4) convergeert voor iedere $n \times n$ matrix A. Dus is ook $e^{At} = I_n + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$ voor iedere $t \in \mathbb{R}$ goed gedefinieerd, en geldt (zie Calculus III, 4.2.9)

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}e^{At} &= A + 2\tfrac{A^2t}{2!} + 3\tfrac{A^3t^2}{3!} + \cdots \\
&= A\left(I_n + At + \tfrac{A^2t^2}{2!} + \tfrac{A^3t^3}{3!} + \cdots\right) \\
&= Ae^{At}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Propositie 2.1.1. De oplossing van (2.3) wordt gegeven door

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Bewijs. Volgens (2.5) geldt voor $x(t)$ gegeven door (2.6)

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \tfrac{d}{dt}\left[e^{A(t-t_0)}x_0\right] = \tfrac{d}{dt}\left[e^{A(t-t_0)}\right]x_0 \overset{s=t-t_0}{=} \tfrac{d}{ds}e^{As}x_0 = Ae^{As}x_0 = \\
&= Ae^{A(t-t_0)}x_0 = Ax(t)
\end{aligned}$$

en verder geldt $x(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}x_0 = e^{A0}x_0 = x_0$. ∎

Zij nu A en B willekeurige $n \times n$ matrices zodanig dat $AB = BA$. Uit definitie (2.4) volgt

$$\begin{aligned}
&e^A \cdot e^B = (I_n + A + \tfrac{A^2}{2!} + \tfrac{A^3}{3!} + \cdots)(I_n + B + \tfrac{B^2}{2!} + \tfrac{B^3}{3!} + \cdots) = \\
&= I_n + (A+B) + (\tfrac{A^2}{2!} + AB + \tfrac{B^2}{2!}) + (\tfrac{A^3}{3!} + \tfrac{A^2B}{2!} + \tfrac{AB^2}{2!} + \tfrac{B^3}{3!}) + \cdots \\
&= I_n + (A+B) + \tfrac{1}{2!}(A+B)^2 + \tfrac{1}{3!}(A+B)^3 + \cdots \\
&= e^{(A+B)}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dit levert de volgende belangrijke eigenschap van de matrix $e^{A(t-t_0)}$ in (2.6):

$$e^{A(t-t_0)} = e^{At} \cdot e^{-At_0} \tag{2.8}$$

voor iedere $t_0, t \in \mathbb{R}$.

Propositie 2.1.2. De oplossing van

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0,$$

wordt gegeven door

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \tag{2.9}$$

Bewijs. Volgens het bewijs van Propositie 2.1.1 geldt

$$\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}x_0 = Ae^{A(t-t_0)}x_0$$

Verder geldt volgens de productregel voor differentiatie

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)ds = \underbrace{e^{A(t-t)}}_{I_n}Bu(t) + A\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

Optelling levert dat $x(t)$ gedefinieerd als in (2.9) voldoet aan $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, terwijl invulling van $t = t_0$ in (2.9) geeft $x(t_0) = x_0$. ∎

De toestandsevolutiefunctie φ van $\dot{x} = Ax + Bu$ wordt dus expliciet gegeven door

$$\varphi(t_1, t_0, x_0, u) = e^{A(t_1-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-s)}Bu(s)ds \tag{2.10}$$

Hieruit is direkt te zien dat φ gezamenlijk lineair is in de begintoestand x_0 en de ingangsfunctie u.

2.1.1 De berekening van e^{At}

Het enige probleem is nu nog om e^{At} expliciet te berekenen. (Slechts in een beperkt aantal gevallen is dit rechtstreeks doenbaar via de machtreeks (2.4).) Laat A een reële $n \times n$ matrix zijn. Het *karakteristieke polynoom* van A is het n-de graads polynoom in λ, gegeven als det $(\lambda I - A)$. Volgens de hoofdstelling van de algebra heeft het karakteristieke polynoom precies n nulpunten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}_n$ (waarvan mogelijkerwijs een deel samenvallen, in welk geval deze nulpunten *meervoudig* worden genoemd). Omdat A reëel is geldt dat als λ_i een nulpunt is van het karakteristieke polynoom, dan ook de *complex toegevoegde* $\overline{\lambda_i}$.[1] De nulpunten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ heten de *eigenwaarden* van de matrix A. Omdat det $(\lambda_i I - A) = 0, i = 1, \cdots, n$, zijn er vectoren $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{C}^n$ zodanig dat $(\lambda_i I - A)v_i = 0, i = 1, \cdots, n$, ofwel

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.11}$$

[1]Voor ieder complex getal $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$, wordt de complex toegevoegde $\bar{z}$ gedefinieerd als $\bar{z} = a - ib$.

Deze vectoren $v_1, \cdots, v_n$ worden *eigenvectoren* van *A behorend bij* de eigenwaarden $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ genoemd.
Indien de eigenwaarden $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ allen verschillend zijn, dan geldt dat de eigenvectoren $v_1, \cdots, v_n$ *onafhankelijk* zijn, zie Opgave 2.1. We zullen in het vervolg voor de eenvoud veronderstellen dat *de matrix A zodanig is dat, zelfs indien de eigenwaarden niet allen verschillend zijn, er toch onafhankelijke eigenvectoren* $v_1, \cdots, v_n$ *bestaan.*
Vorm nu de $n \times n$ complexe matrix

$$T := [v_1 v_2 \cdots v_n] \tag{2.12}$$

(d.w.z. de i-de kolom van T is de i-de eigenvector v_i). Wegens (2.11) geldt

$$AT = A\,[v_1 v_2 \cdots v_n] = [\lambda_1 v_1 \cdots \lambda_n v_n] = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Verder is, wegens de aanname dat $v_1, \cdots, v_n$ onafhankelijk zijn, T *inverteerbaar*, zodat we (2.13) aan beide zijden vóór kunnen vermenigvuldigen met T^{-1}, resulterend in

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

De e-macht van een *diagonaal*matrix zoals in (2.14) volgt rechtstreeks uit de machtreeksdefinitie (2.5):

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} t} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \lambda_1^2 t^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 t^2 \end{bmatrix} + \cdots = \tag{2.15}$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Verder geldt:

Lemma 2.1.3. $e^{At} = Te^{T^{-1}ATt}T^{-1}$

Bewijs. We zullen bewijzen dat

$$e^M T = Te^{T^{-1}MT}$$

voor een willekeurige $n \times n$ matrix M. Substitutie van $M = At$ en achtervermenigvuldiging met T^{-1} levert dan het gewenste resultaat.
Er geldt volgens (2.5)

$$\begin{aligned} Te^{T^{-1}MT} &= T\left[I + T^{-1}MT + \tfrac{1}{2!}(T^{-1}MT)(T^{-1}MT) + \cdots\right] \\ &= T\left[I + T^{-1}MT + \tfrac{1}{2!}T^{-1}M^2T + \tfrac{1}{3!}T^{-1}M^3T + \cdots\right] \\ &= \left[I + M + \tfrac{1}{2!}M^2 + \tfrac{1}{3!}M^3 + \cdots\right]T = e^M T \end{aligned}$$

■

Toepassing van Lemma 2.1.3 geeft nu wegens (2.14) en (2.15) het eindresultaat

$$e^{At} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1} \tag{2.16}$$

We concluderen dat de berekening van e^{At} terug te voeren is tot de berekening van de eigenwaarden $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ van A en de bijbehorende onafhankelijke eigenvectoren $v_1, \cdots, v_n$.

Voorbeeld 2.1.4. Beschouw het massa-veer-demper systeem uit Voorbeeld 1.2.6 met $k = 0$ (geen veer). Dan is

$$\begin{aligned} &A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{m} \end{bmatrix}, \\ &\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\tfrac{r}{m}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{r}{m} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Derhalve $T = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{m} \end{smallmatrix}\right]$, en $e^{At} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{r}{m} \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{r}{m}t} \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & \frac{m}{r} \\ 0 & -\frac{m}{r} \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & \frac{m}{r}(1-e^{\frac{r}{m}t}) \\ 0 & e^{-\frac{r}{m}t} \end{smallmatrix}\right]$.
Neem vervolgens $k \neq 0$ en $r = 0$ (geen demper). Dan is

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}, \lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega, v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ \omega \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix},$$

met $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Dus

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -i & i \\ \omega & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega & -i \\ -\omega & -i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-2i\omega} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

(Gebruik $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$). ■

De transformatiematrix T heeft ook een duidelijke *meetkundige* interpretatie. Beschouw (2.14) of equivalent

$$A = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} T^{-1} \tag{2.18}$$

Op dezelfde wijze kunnen we (2.16) herschrijven als

$$e^{At} = [v_1 \cdots v_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1} = \left[v_1 e^{\lambda_1 t} \cdots v_n e^{\lambda_n t} \right] T^{-1} \tag{2.19}$$

Derhalve is de oplossing van $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, voor $u = 0$ gelijk aan

$$\begin{aligned} x(t) = e^{At} x_0 &= \left[v_1 e^{\lambda_1 t} \cdots v_n e^{\lambda_n t} \right] T^{-1} x_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i e^{\lambda_i t} \cdot \mu_i \end{aligned} \tag{2.20}$$

met de vector $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)^T$ gegeven als $T^{-1} x_0$. De oplossing is dus te schrijven als een lineaire combinatie van exponentiëel verlopende bewegingen langs de eigenvectoren v_i, $i = 1, \cdots, n$. Indien λ_i en v_i *reëel* zijn, dan noemen we de beweging $e^{\lambda_i t} v_i$ een karakteristieke beweging (Engels: “mode”) van het systeem.
De j-de coëfficient μ_j in (2.20) is alleen ongelijk aan nul indien de begintoestand x_0 een komponent heeft *langs* de j-de eigenvector v_j. Omdat $v_1, \cdots, v_n$ onafhankelijk zijn, en dus een *basis* voor $\mathbb{R}^n$ vormen, kunnen we namelijk schrijven

$$x_0 = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \tag{2.21}$$

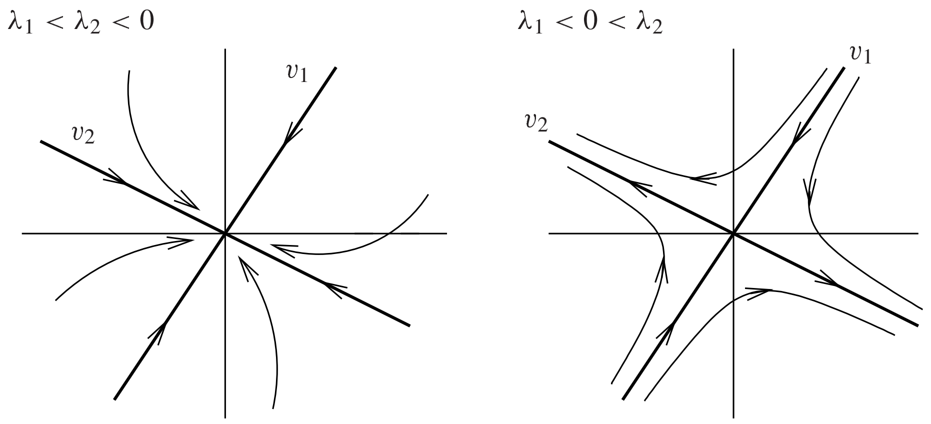
voor zekere constantes $c_i \in \mathbb{R}$. Uit de definitie van T^{-1} volgt dat $T^{-1} v_i$ de i-de basisvector is, en dus geldt

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = T^{-1} x_0 = T^{-1}(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = c_1 T^{-1} v_1 + \cdots + c_n T^{-1} v_n = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Dus is in de som (2.20) de karakteristieke beweging $v_j e^{\lambda_j t}$ niet-triviaal aanwezig dan en slechts dan als $c_j \neq 0$ in (2.21).

We kunnen de oplossingen van $\dot{x} = Ax$ voor *reële* eigenwaarden $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ en reële onafhankelijke eigenvectoren $v_1, \cdots, v_n$ schetsen als in Figuur 2.1.

In het geval van *complexe* eigenwaarden en eigenvectoren vullen we het bovenstaande als volgt aan.



Figuur 2.1: Karakteristieke bewegingen.

Propositie 2.1.5. Stel λ is een complexe eigenwaarde van A. Schrijf $\lambda = \sigma + i\omega$, met $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$. Dan is $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ ook een eigenwaarde van A. Zij $v \in \mathbb{C}^n$ een eigenvector behorend bij λ. Schrijf $v = r + is$, met $r, s \in \mathbb{R}^n$. Dan is $\bar{v} = r - is$ een eigenvector behorend bij $\bar{\lambda}$.
De oplossing van $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, behorend bij een reële begintoestand x_0 in het vlak opgespannen door r en s, kan geschreven worden als

$$x(t) = \rho e^{\sigma t}(r\sin(\omega t + \varphi) + s\cos(\omega t + \varphi)) \tag{2.22}$$

voor zekere reële constanten ρ, φ.

Bewijs. Omdat A reëel is geldt: $Av = \lambda v \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Indien $x_0 \in \text{span}\{r, s\}$, dan geldt voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_0 = ar + bs &= \tfrac{1}{2}(a - ib)(r + is) + \tfrac{1}{2}(a + ib)(r - is) \\ &= \mu v + \bar{\mu}\bar{v} \end{aligned}$$

De oplossing van $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ is dus

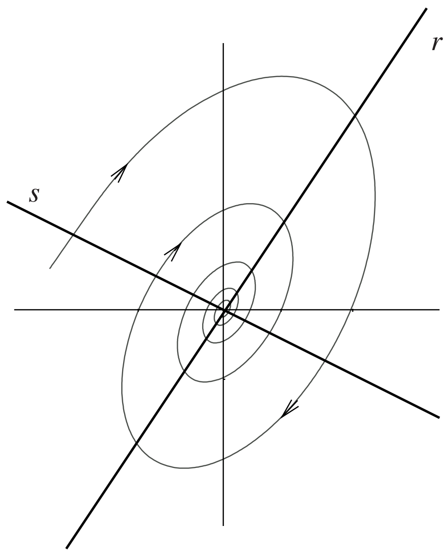
$$x(t) = \mu e^{\lambda t} v + \bar{\mu} e^{\bar{\lambda} t}\bar{v}$$

Schrijf nu $\mu = \frac{\rho}{2i}e^{i\varphi}$, met ρ en $\varphi \in \mathbb{R}$. Dan volgt

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{\rho}{2i}(e^{\lambda t + i\varphi}v - e^{\lambda t - i\varphi}\bar{v}) = \rho \mathrm{Im}(e^{\lambda t + i\varphi}v) \\ &= \rho \mathrm{Im}(e^{\sigma t + i(\omega t + \varphi)}(r + is)) = \\ &= \rho e^{\sigma t}(r\sin(\omega t + \varphi) + s\cos(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

■

We noemen de oplossing (2.22) behorend bij een *paar* van complexe eigenwaarden λ en $\bar{\lambda}$ ook wel een *trillingswijze* van het systeem. Een schets van de oplossing (2.22) voor $\sigma < 0$ is als volgt (zie Figuur 2.2).



Figuur 2.2: Trillingswijze.

2.1.2 Coördinatentransformaties

Een andere manier om tegen de berekening van e^{At} in Lemma 2.1.3 aan te kijken, is de volgende. Volgens aanname is de transformatiematrix $T = [v_1 \cdots v_n]$ inverteerbaar. We kunnen dus nieuwe coördinaten $z \in \mathbb{R}^n$ definiëren d.m.v.

$$z = T^{-1}x \tag{2.23}$$

(Wegens $x = Tz$, zijn z de coördinaten t.o.v. de *basis* $v_1, \cdots, v_n$ van $\mathbb{R}^n$, terwijl x de coördinaten zijn t.o.v. de *natuurlijke basis* van $\mathbb{R}^n$.) Invullen van $z = T^{-1}x$ en $x = Tz$ in de vergelijkingen van het lineaire tijdsinvariante ingangs-toestands-uitgangssysteem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

levert

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T^{-1}\dot{x} = T^{-1}(Ax + Bu) = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y &= CTz + Du \end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y &= \tilde{C}z + Du \end{aligned} \tag{2.24}$$

met

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT \\ \tilde{B} &= T^{-1}B \\ \tilde{C} &= CT \end{aligned} \tag{2.25}$$

We hebben dus een *nieuw* lineair tijdsinvariant ingangs-toestands-uitgangssysteem verkregen, met getransformeerde matrices $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ gedefinieerd in (2.25). Volgens (2.14) geldt $\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, en dus wordt de oplossing van $\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u$ voor $u = 0$ gegeven door

$$z(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} z(0) \tag{2.26}$$

Merk op dat de bovenstaande transformatie van (2.23) naar (2.24) geldt voor een *willekeurige* inverteerbare matrix T (niet noodzakelijkerwijs bestaande uit eigenvectoren van A). We noemen de transformatie $x = Tz (\Leftrightarrow z = T^{-1}x)$ een *toestandstransformatie*, en het systeem (2.24) heet het *getransformeerde* systeem.

2.1.3 Stabiliteit van evenwichtspunten

De eigenwaarden van A bepalen in belangrijke mate het kwalitatieve *gedrag* van de oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen $\dot{x} = Ax$. Merk eerst op dat

$$\left|e^{\lambda_j t}\right| = \left|e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j t}\right| \cdot \left|e^{i\,\mathrm{Im}\,\lambda_j t}\right| = e^{(\mathrm{Re}\,\lambda_j)t} \tag{2.27}$$

Derhalve, als $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, dan convergeert $\left|e^{\lambda_j t}\right|$ en dus ook $e^{\lambda_j t}$ naar 0 voor $t \to \infty$. Dit leidt tot de volgende definitie en propositie.

Definitie 2.1.6. Beschouw het lineaire stelsel differentiaalvergelijkingen $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$. De oorsprong $x = 0$ is een *asymptotisch stabiel evenwichtspunt* van $\dot{x} = Ax$ indien voor alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de oplossing $x(t)$ voldoet aan

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

■

Propositie 2.1.7. $x = 0$ is een asymptotisch stabiel evenwichtspunt van $\dot{x} = Ax$ dan en slechts dan als Re $\lambda < 0$ voor alle eigenwaarden λ van A.

Bewijs. Indien er bij de eigenwaarden $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *onafhankelijke* eigenvectoren $v_1, \cdots, v_n$ bestaan dan volgt de propositie meteen uit (2.20), daar volgens (2.27) $e^{\lambda_j t} \to 0$ voor $t \to \infty$ dan en slechts dan als Re $\lambda_j < 0$. Voor een bewijs van het algemene geval verwijzen we naar ieder boek over lineaire differentiaalvergelijkingen. ■

Uit (2.20) en (2.27) volgt ook direkt dat indien minstens één eigenwaarde λ van A voldoet aan Re $\lambda > 0$, dan geldt $|x(t)| \to \infty$ voor $t \to \infty$, voor zekere beginvoorwaarden x_0. Immers, zij x_0 een veelvoud van v (of, indien λ en v complex zijn, zij $x_0 \in \text{span}\{r, s\}$, met r en s als in Propositie 2.1.5). Dan volgt m.b.v. (2.27) direct uit (2.20) (respectievelijk, (2.22)) dat $|x(t)| \to \infty$ voor $t \to \infty$.

Opmerking Uit de lineariteit volgt dat indien $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ voor de oplossing $x(t)$ bij een zekere beginvoorwaarde x_0, dan ook $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$ voor de oplossing behorende bij de beginvoorwaarde cx_0, voor iedere constante $c \in \mathbb{R}$. We kunnen dus x_0 willekeurig dicht bij $x = 0$ kiezen zodanig dat nog steeds $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$. Daarom heet $x = 0$ in dit geval een *instabiel* evenwichtspunt, omdat er willekeurig dichtbij $x = 0$ beginvoorwaarden zijn vanwaar uit de oplossing naar oneindig gaat.

Opmerking Voor een stabiliteitsanalyse van de situatie dat de eigenwaarden van A slechts voldoen aan Re $\lambda \leq 0$ (zuiver imaginaire eigenwaarden van A toegelaten) verwijzen we naar de literatuur.

Voorbeeld 2.1.8. Beschouw het massa-veer-demper systeem uit Voorbeeld 1.2.6 met $k > 0$ en $r > 0$. Dan is

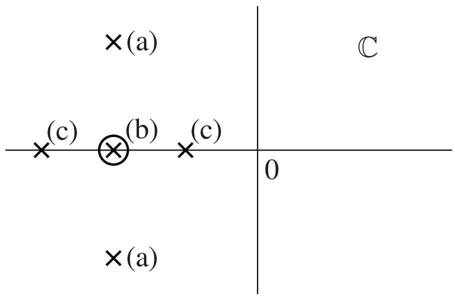
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{r}{m} \end{bmatrix}, \lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Er zijn drie gevallen te onderscheiden (zie Figuur 2.3)

(a) $\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m} < 0$. In dit geval zijn λ_1 en λ_2 complexe eigenwaarden, met Re $\lambda_1 =$ Re $\lambda_2 = -\frac{r}{2m} < 0$. Dit wordt wel de *ondergedempte* situatie genoemd.

(b) $\frac{r^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = 0$. In dit geval is $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{r}{2m} < 0$. Dit heet de *kritisch gedempte* situatie.

(c) $\frac{r^2}{4m} - \frac{k}{m} > 0$. In dit geval zijn λ_1 en λ_2 beiden reëel, en geldt $\lambda_{1,2} < 0$. Dit heet de *overgedempte* situatie.



Figuur 2.3: Eigenwaarden bij gedempte trilling.

In alle drie gevallen geldt Re $\lambda_{1,2} < 0$, en dus $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, hetgeen overeenkomt met onze fysische intuitie. In geval (a) convergeert $x(t)$ "oscillatorisch" naar 0, zie Figuur 2.2. ■

Ook voor niet-lineaire differentiaalvergelijkingen kunnen we stabiliteitsnoties definiëren. Beschouw een n-dimensionaal stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.28}$$

met $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een (niet-lineaire) afbeelding. Een punt $x^* \in \mathbb{R}^n$ wordt een *evenwichtspunt* van (2.28) genoemd (zie Propositie (1.3.7)) indien

$$0 = f(x^*) \tag{2.29}$$

(Dit betekent dat de oplossing $x(t)$ van (2.28) behorende bij de beginvoorwaarde x^* de constante oplossing $x(t) = x^*,\ t \in \mathbb{R}$, is.) Het evenwichtspunt x^* heet *lokaal asymptotisch stabiel* indien er een $c > 0$ bestaat zodanig dat

$$|x(0) - x^*| < c \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = x^*, \tag{2.30}$$

met $x(t)$ de oplossing behorend bij beginvoorwaarde $x(0)$.[2] Lokale asymptotische stabiliteit kan als volgt worden nagegaan.

Propositie 2.1.9. Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen (2.28) met evenwichtspunt x^*. Definieer de $n \times n$ matrix A met (i, j)-de element $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*),\ i, j = 1, \cdots, n$. Het evenwichtspunt x^* is lokaal asymptotisch stabiel indien Re $\lambda < 0$ voor alle eigenwaarden λ van A, en niet lokaal asymptotisch stabiel indien A een eigenwaarde λ heeft met Re $\lambda > 0$.

[2] Meestal wordt de definitie van lokale asymptotische stabiliteit nog verder aangescherpt door naast (2.30) te eisen dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat $|x(0) - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t) - x^*| < \epsilon,\ \forall t \geq 0$.

Bewijs. (Schets) Uit de Taylorexpansie van $f(x)$ rond x^* geldt dat voor $(x - x^*)$ voldoende klein

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + A(x - x^*) + \cdots \\ &\approx A(x - x^*) \end{aligned} \tag{2.31}$$

De verschilvector $x - x^*$ voldoet dus bij benadering aan de lineaire differentiaalvergelijking $\frac{d}{dt}(x - x^*) = A(x - x^*)$. Op basis van Propositie 2.1.7 verwachten we dus $\lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*| = 0$ voor $|x(0) - x^*|$ voldoende klein, indien Re $\lambda < 0$ voor alle eigenwaarden λ van A. ∎

Voorbeeld 2.1.10. Beschouw het prooi/roofdiermodel uit Voorbeelden 1.2.8 en 1.3.8 voor $u_1 = u_2 = 0$. Beschouw het evenwichtspunt $x^* = (0, 0)$. Linearisatie in $x^* = (0, 0)$ levert

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

met eigenwaarden $\lambda_1 = a > 0$, en $\lambda_2 = -d < 0$. Dit evenwichtspunt is dus *niet* lokaal asymptotisch stabiel.

Linearisatie in het andere evenwichtspunt $x^* = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ levert als eigenwaarden $\lambda_1 = i\sqrt{ad}$, en $\lambda_2 = -i\sqrt{ad}$. Omdat beide eigenwaarden zuiver imaginair zijn kunnen we op basis van deze linearisatie niets besluiten over de stabiliteit van het evenwichtspunt $x^* = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$. (Uit simulaties blijkt dat de oplossingen om dit evenwichtspunt gesloten periodieke banen zijn.) ∎

Stabiliteit kan ook gedefinieerd worden voor *hogere-orde* differentiaalvergelijkingen. We zullen ons hier beperken tot scalaire lineaire hogere-orde differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\frac{d^n y}{dt^n}(t) + p_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) + \cdots + p_1\frac{dy}{dt}(t) + p_0 y(t) = 0 \tag{2.32}$$

met $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Definitie 2.1.11. De nul-oplossing $y(t) = 0$ van (2.32) is asymptotisch stabiel indien iedere oplossing $y(t), t \geq 0$, van (2.32) voldoet aan

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \tag{2.33}$$

Voorwaarden voor asymptotische stabiliteit kunnen direkt uit de stabiliteitstheorie van $\dot{x} = Ax$ afgeleid worden. Dit gebeurt door (2.32) te herschrijven als het volgende *stelsel* van 1-ste orde differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

met de notaties

$$y^{(1)}(t) = \frac{dy}{dt}(t), \, y^{(2)}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}(t), \cdots, y^{(n-1)}(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(t). \tag{2.35}$$

Door de toestandsvektor $x(t)$ te definiëren als

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

hebben we dus (2.32) herschreven als

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} x \tag{2.37}$$

Op grond van (2.36) is duidelijk dat $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ impliceert dat $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$. Gebruikmakend van de theorie van oplossingen van (2.32) is tevens te concluderen dat $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ dan en slechts dan als $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. De asymptotische stabiliteit van de nuloplossing van (2.32) is dus equivalent met de asymptotische stabiliteit van het nul- evenwichtspunt van (2.37). Propositie 2.1.7 impliceert dus dat de nuloplossing van (2.32) asymptotisch stabiel is dan en slechts dan als $\mathrm{Re}\lambda < 0$ voor al de eigenwaarden λ van

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Volgens Opgave 2.4 zijn deze eigenwaarden de nulpunten van het polynoom

$$p(s) = p_0 + p_1 s + \cdots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n \tag{2.38}$$

We verkrijgen dus de volgende propositie.

Propositie 2.1.12. De nuloplossing $y(t) = 0$ van (2.32) is asymptotisch stabiel d.e.s.d.a. $\mathrm{Re}\lambda < 0$ voor alle nulpunten λ van (2.38).

2.2 Ingangs-uitgangsanalyse

Aan het eind van Hoofdstuk 1 is opgemerkt dat een algemeen ingangs-toestands-uitgangssysteem voor ieder begintijdstip t^* en begintoestand x^* een *operator*F_{x^*,t^*} definieert van de ruimte van ingangssignalen op $[t^*, \infty)$ naar de ruimte van uitgangssignalen op $[t^*, \infty)$. Voor een lineair tijdsinvariant ingangs-toestands-uitgangssysteem kunnen we deze ingangs-uitgangs operatoren F_{x^*,t^*} expliciet aangeven. Immers, volgens Propositie 2.1.2 is de oplossing van

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t^*) = x^*,$$

gelijk aan

$$x(t) = e^{A(t-t^*)}x^* + \int_{t^*}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Omdat verder de uitgang y wordt vastgelegd middels

$$y = Cx + Du$$

geldt derhalve dat F_{x^*,t^*} gegeven wordt door

$$y(t) = Ce^{A(t-t^*)}x^* + \int_{t^*}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{2.39}$$

De eerste term van het rechterlid van (2.39) hangt niet van het ingangssignaal u af, en is dus voor een ingangs-uitgangs-analyse niet van belang. In het bijzonder kunnen we de ingangs-uitgangsoperator voor $x^* = 0$ beschouwen:

$$y(t) = \int_{t^*}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{2.40}$$

Wegens tijdsinvariantie blijft het verband tussen ingangs- en uitgangssignalen hetzelfde indien we op *beide signalen* de translatieoperator S_{t^*} toepassen, waarmee de ondergrens van de integraal in (2.40) naar 0 wordt verschoven. We kunnen ons dus concentreren op de ingangs-uitgangsoperator $F_{0,0}$, d.w.z.

$$y(t) = \int_{0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{2.41}$$

We noemen het uitgangssignaal $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^p$ gegeven door (2.41) de *responsie* op het ingangssignaal $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$. Als eerste merken we op dat het verband tussen ingangs- en uitgangssignalen gegeven door (2.41) *lineair* is, d.w.z., indien de ingangssignalen

$$\begin{aligned} u_1 &: [0, \infty) \to \mathbb{R}^m \\ u_2 &: [0, \infty) \to \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

resulteren in de respectievelijke uitgangssignalen

$$\begin{aligned} y_1 &: [0, \infty) \to \mathbb{R}^p \\ y_2 &: [0, \infty) \to \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

dan resulteert het ingangssignaal

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$$

in het uitgangssignaal

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}^p$$

voor iedere keuze van constanten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Verder zien we in (2.41) heel duidelijk de *causaliteit* (zie (1.48)) van de operator $F_{0,0}$: de uitgang $y(t)$ hangt *niet* af van de ingangswaarden $u(\tau)$ voor $\tau > t$.
Hoewel in (2.41) praktisch alle ingangssignalen u toelaatbaar zijn (de enige eis is dat de integraal in (2.41) goed gedefinieerd is), is het voor de verdere analyse van het ingangs-uitgangsgedrag nuttig om een overzichtelijke en gemakkelijk te hanteren *deelklasse* van ingangssignalen te nemen, en alleen de responsie op de ingangssignalen in deze deelklasse te beschouwen. Natuurlijk moet deze deelklasse wel voldoende “rijk” te zijn om toch “alle” informatie aangaande $F_{0,0}$ te kunnen analyseren.
Enigszins paradoxaal breiden we daartoe eerst de klasse van ingangssignalen uit tot *complex*waardige ingangssignalen, i.e.,

$$u : [0, \infty) \to \mathbb{C}^m$$

De deelklasse van complexwaardige ingangssignalen die we zullen beschouwen zijn alle functies van de vorm

$$u(t) = ce^{st}, \quad t \geq 0, \quad s \in \mathbb{C}, \quad c \in \mathbb{C}^m \tag{2.42}$$

Deze deelklasse blijkt precies “te passen” op de lineaire structuur, in de zin dat de bijbehorende uitgangssignalen “asymptotisch” tot dezelfde klasse van signalen behoren.
Het uitgangssignaal ten gevolge van het ingangssignaal (2.42) wordt volgens (2.41) gegeven door

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bce^{s\tau}d\tau + Dce^{st} \tag{2.43}$$

Door de nieuwe integratievariabele $r := t - \tau$ in te voeren, wordt dit

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t Ce^{Ar}Bce^{s(t-r)}dr + Dce^{st} \\ &= \left[\int_0^t Ce^{Ar}Be^{-sr}dr + D\right]ce^{st} \end{aligned} \tag{2.44}$$

We beschouwen de uitdrukking tussen haakjes in meer detail. Eerst formuleren we het volgende lemma.

Lemma 2.2.1. *Zij $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A, en laat $s \in \mathbb{C}$ zodanig dat*

$$Re\, s > Re\, \lambda_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.45}$$

Dan bestaat de limiet

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t Ce^{Ar}Be^{-sr}dr$$

(d.w.z., alle componenten convergeren naar een eindig complex getal).

Bewijs. We bewijzen dit weer alleen voor het geval dat A onafhankelijke eigenvectoren $v_1, \cdots, v_n$ behorend bij $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ bezit. Zij $T = [v_1, \cdots, v_n]$. Dan geldt volgens (2.16)

$$e^{Ar} = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n r} \end{bmatrix} T^{-1}$$

Derhalve zijn alle elementen van e^{Ar}, en dus ook van $Ce^{Ar}B$, lineaire combinaties van de e-machten $e^{\lambda_1 r}, \cdots, e^{\lambda_n r}$. Indien we dus aantonen dat

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{\lambda_i r} \cdot e^{-sr} dr < \infty$$

voor alle $i = 1, \cdots, n$, dan zijn we klaar. Er geldt

$$\left| \int_0^t e^{\lambda_i r} \cdot e^{-sr} dr \right| \leq \int_0^t \left| e^{\lambda_i r} \cdot e^{-sr} \right| dr$$

$$= \int_0^t \left| e^{(\lambda_i - s)r} \right| dr = \int_0^t e^{\mathrm{Re}(\lambda_i - s)r} dr,$$

en omdat volgens (2.45) Re $(\lambda_i - s) < 0$, geldt

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{\mathrm{Re}(\lambda_i - s)r} dr < \infty$$

■

2.2.1 Stapresponsie

Beschouw nu eerst de *constante* ingangssignalen

$$u(t) = c, \quad c \in \mathbb{R}^m, \quad t \geq 0,$$

d.w.z. (2.42) met $s = 0$ en c reëel. Om aan (2.45) te voldoen nemen we aan dat

$$\mathrm{Re}\ \lambda_i < 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

oftewel (zie Definitie 2.1.6 en Propositie 2.1.7), we nemen aan dat $x = 0$ een *asymptotisch stabiel evenwichtspunt van* $\dot{x} = Ax$ is. De responsie op een constant ingangssignaal $u(t) = c$ wordt dan gegeven door

$$y(t) = \left[\int_0^t Ce^{Ar}Bdr + D \right] c$$

hetgeen voor $t \to \infty$ convergeert naar de eindige vector

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \left[\int_0^\infty Ce^{Ar}Bdr + D\right]c =: y_\infty$$

In Opgave 2.2 wordt aangetoond dat y_∞ gelijk is aan

$$y_s = \left[-CA^{-1}B + D\right]c$$

De constante y_s wordt wel de *stationaire* responsie op het constante ingangssignaal $u(t) = c,\ t \geq 0$, genoemd. Verder wordt het quotient $\frac{y_s}{c}$ wel de *statische* versterking van het systeem genoemd. In het geval $p = m = 1$ en $c = 1$, noemen we de tijdsfunctie $y(t),\ t \geq 0$, d.w.z.

$$y(t) = \int_0^t Ce^{Ar}Bdr + D \in \mathbb{R},$$

de *stapresponsie* van het systeem. (De functie $u(t) = 0, t < 0, u(t) = 1, t \geq 0$, wordt de *stapfunctie* genoemd.) De stapresponsie is een belangrijk hulpmiddel in het analyseren van de ingangs-uitgangseigenschappen van een asymptotisch stabiel systeem, omdat deze tijdsfunctie weergeeft *hoe* convergentie naar de stationaire responsie y_s plaatsvindt.

2.2.2 Frequentieanalyse

Voor algemene ingangssignalen (2.42) loopt de ingangs-uitgangs-analyse als volgt. Beschouw een algemeen ingangs-toestands-uitgangssysteem (2.1). Neem $s \in \mathbb{C}$ zodanig groot dat aan (2.45) is voldaan. Dan convergeert de uitdrukking tussen haakjes in (2.44) voor $t \to \infty$ naar

$$G(s) := \int_0^\infty Ce^{Ar}Be^{-sr}dr + D \tag{2.46}$$

Deze $p \times m$ matrix $G(s)$ wordt de *overdrachtsmatrix* van het systeem genoemd. Beschouw nu (2.44). *Voor t groot genoeg* geldt dus bij benadering

$$y(t) \sim G(s)ce^{st}, \quad t \geq 0 \tag{2.47}$$

Het rechterlid van (2.47) noemen we weer de *stationaire responsie* $y_s(t)$. Het verschil

$$y(t) - G(s)ce^{st}, \quad t \geq 0$$

convergeert naar 0 voor $t \to \infty$, en wordt het *inschakelverschijnsel* genoemd. Voor veel systemen is het inschakelverschijnsel van korte duur, en zal al voor t relatief klein de benadering (2.47) gelden.
Merk op dat de stationaire responsie binnen dezelfde deelklasse van signalen valt als waartoe de ingangssignalen behoren: de stationaire responsie op het ingangssignaal

$u(t) = ce^{st}, t \geq 0, c \in \mathbb{C}^m$, is $y(t) = [G(s)c]\, e^{st}, t \geq 0$, met $G(s)c \in \mathbb{C}^p$. De stationaire responsie op een ingangssignaal ce^{st} is dus van de vorm be^{st}, met $b = G(s)c$. Van bijzonder belang is het geval dat s zuiver imaginair is, d.w.z.

$$s = i\omega, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Om aan (2.45) voldaan te laten blijven dient nu aangenomen te worden dat

$$\mathrm{Re}\, \lambda_i < 0, \quad i = 1, \cdots, n$$

oftewel (zie Definitie 2.1.6 en Propositie 2.1.7), $x = 0$ dient een asymptotisch stabiel evenwichtspunt van $\dot{x} = Ax$ te zijn. De stationaire responsie op

$$u(t) = ce^{i\omega t}, \quad t \geq 0, \quad c \in \mathbb{C}^m, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

wordt nu gegeven door

$$y_s(t) = [G(i\omega)c]\, e^{i\omega t}, t \geq 0$$

Een bijzonder inzichtelijk verband kunnen we leggen in het geval $p = m = 1$ (*scalaire* ingang en uitgang). In dit geval wordt de 1×1 matrix $G(s) \in \mathbb{C}$ de overdrachts*functie* van het systeem genoemd. Neem $c = 1$, dan zien we dat

$$u(t) = e^{i\omega t}, t \geq 0 \Rightarrow y_s(t) = G(i\omega)e^{i\omega t}, t \geq 0 \tag{2.48}$$

met $G(i\omega) \in \mathbb{C}$ (1×1 matrix). Omdat geldt

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \tag{2.49}$$

kunnen we de stationaire responsie ook als volgt weergeven. Wegens (2.49) geldt $\sin \omega t = \mathrm{Im}(e^{i\omega t})$, en wegens lineariteit van de afbeelding (2.48) geldt dus

$$u(t) = \sin \omega t, t \geq 0 \Rightarrow y_s(t) = \mathrm{Im}\left[G(i\omega)e^{i\omega t}\right], t \geq 0 \tag{2.50}$$

Schrijven we nu $G(i\omega)$ in zijn polaire vorm[3]

$$G(i\omega) = |G(i\omega)|\, e^{i \arg G(i\omega)} \tag{2.51}$$

dan geldt dus

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \mathrm{Im}\left[\mid G(i\omega) \mid e^{i \arg G(i\omega)} \cdot e^{i\omega t}\right] \\ &= \mid G(i\omega) \mid \mathrm{Im}\left(e^{i[\arg G(i\omega) + \omega t]}\right) \\ &= \mid G(i\omega) \mid \sin\left(\omega t + \arg G(i\omega)\right) \end{aligned} \tag{2.52}$$

[3]De polaire vorm van een complex getal $z = a + ib \in \mathbb{C}$ is $z = re^{i\varphi}$, met $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $\varphi = \arg z = \arctan \frac{b}{a}$.

Evenzo geldt voor een verschoven sinussignaal met willekeurige amplitude u_ω

$$u(t) = u_\omega \sin(\omega t + \varphi_\omega), t \geq 0 \Rightarrow y_s(t) = \mid G(i\omega) \mid u_\omega \sin(\omega t + \varphi_\omega + \arg G(i\omega)) \quad (2.53)$$

Dus de stationaire responsie op een sinus met frequentie ω, amplitude u_ω en fase φ_ω is een sinus met dezelfde frequentie ω, en met *amplitude*

$$\mid G(i\omega) \mid u_\omega$$

en een *fase* ter grootte van

$$\varphi_\omega + \arg G(i\omega)$$

We noemen daarom $\mid G(i\omega) \mid$ de *versterking* (Engels: gain), en $\arg G(i\omega)$ de *faseverdraaiing* (Engels: phase shift). We zien dat het systeem als een *filter* werkt: de amplitude bij sommige frequenties ω wordt meer versterkt dan bij andere frequenties, terwijl ook de faseverdraaiing van de frequentie afhangt.

Voorbeeld 2.2.2. Algemener geldt dat een *lineaire combinatie* van sinusvormige ingangssignalen van uiteenlopende frequenties een stationaire responsie geeft, die een lineaire combinatie is van sinusvormige signalen met *dezelfde* frequenties:

$$\begin{aligned} u(t) = \quad & \sum_\omega u_\omega \sin(\omega t + \varphi_\omega) \Rightarrow \\ & y_s(t) = \sum_\omega \mid G(i\omega) \mid u_\omega \sin(\omega t + \varphi_\omega + \arg G(i\omega)) \end{aligned} \quad (2.54)$$

■

Voorbeeld 2.2.3. Indien $u(t), t \in \mathbb{R}$, een *periodieke* functie is met periode T, d.w.z.

$$u(t) = u(t+T), \quad \forall t \geq 0,$$

dan is de *Fourierreeks* van u van de vorm

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.55)$$

voor zekere constantes $c_k \in \mathbb{C}$ (de complexe Fouriercoëfficienten). Dus is in dit geval de stationaire responsie gelijk aan

$$y_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |G(ik\omega)| c_k e^{ik\omega t + i \arg G(ik\omega)} \quad (2.56)$$

■

2.2.3 Berekening van de overdrachtsmatrix $G(s)$

De $p \times m$ overdrachtsmatrix $G(s)$, gegeven door (zie (2.46)

$$G(s) = \int_0^\infty Ce^{Ar}Be^{-sr}dr + D$$

kan berekend worden als volgt. Beschouw eerst de $n \times n$ matrix

$$\int_0^\infty e^{Ar} \cdot e^{-sr}dr$$

Merk op dat voor $n = 1$ en A gelijk aan $a \in \mathbb{R}$ de integraal $\int_0^\infty e^{ar} \cdot e^{-sr}dr = \int_0^\infty e^{-(s-a)r}dr$ gegeven wordt door $\frac{1}{s-a}$ (indien Re $s > a$). Evenzo volgt dat

$$\int_0^\infty e^{Ar} \cdot e^{-sr}dr = \int_0^\infty e^{-(sI_n - A)r}dr = (sI_n - A)^{-1} \tag{2.57}$$

indien Re $s >$ Re λ_i, voor alle eigenwaarden $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ van A (vergelijk met Lemma 2.2.1). Hier duidt I_n de $n \times n$ eenheidsmatrix aan met de diagonaalelementen gelijk aan 1 en alle andere elementen gelijk aan 0. Derhalve geldt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Ce^{Ar}Be^{-sr}dr &= C\left[\int_0^\infty e^{Ar} \cdot e^{-sr}dr\right]B = \\ &= C(I_n s - A)^{-1}B \end{aligned} \tag{2.58}$$

en we verkrijgen

Propositie 2.2.4. De overdrachtsmatrix $G(s)$ van het systeem $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du$, is gelijk aan

$$G(s) = C(I_n s - A)^{-1}B + D \tag{2.59}$$

Opmerking Merk op dat

$$G(s) - D = \int_0^\infty Ce^{Ar}Be^{-sr}dr$$

niets anders is dan de *Laplace getransformeerde* van de tijdsfunctie

$$Ce^{At}B, \quad t \geq 0 \tag{2.60}$$

Teruggaand naar de formule (2.41) voor de ingangs-uitgangsoperator $F_{0,0}$,

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

zien we dat de integraal in deze uitdrukking de *convolutie* is van de functie $Ce^{At}B,\ t \geq 0$, en het willekeurige ingangssignaal $u(t), t \geq 0$. Definiëren we nu de Laplace getransformeerde van de ingangs- en uitgangssignalen als

$$\begin{aligned} U(s) &:= \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt \\ Y(s) &:= \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \end{aligned} \tag{2.61}$$

dan geldt volgens de regels van de Laplace transformatie (i.h.b. de eigenschap dat de Laplace getransformeerde van een convolutie gelijk is aan het *produkt* van de Laplace getransformeerden) dat

$$Y(s) = G(s)U(s) \tag{2.62}$$

Door de Laplace transformatie van vectorwaardige en matrixwaardige tijdsfuncties *elementsgewijs* te definiëren geldt formule (2.62) ook voor $m \geq 1$ en $p \geq 1$, in welk geval $U(s)$ een m-vector, $Y(s)$ een p-vector is, en $G(s)$ een $p \times m$ matrix is.

Opmerking Voor een alternatieve manier om dezelfde uitdrukking voor $G(s)$ te bepalen verwijzen we naar Opgave 2.3.

Door de inverse van $sI - A$ te bepalen m.b.v. de regel van Cramer weten we dat

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{p(s)} \begin{bmatrix} q_{11}(s) & \cdots & q_{1n}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1}(s) & \cdots & q_{nn}(s) \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

met

$$\begin{aligned} & p(s) = \det\,(sI - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_0,\ p_i \in \mathbb{R} \\ & \text{(het karakteristieke polynoom van } A\text{),} \\ & (-1)^{i+j}q_{ij}(s) = \text{determinant van de } (n-1) \times (n-1)\text{matrix} \\ & \text{verkregen door weglating van de i-de kolom} \\ & \text{en j-de rij van } sI - A. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Omdat de graad van $p(s)$ gelijk aan n is, en de graad van alle polynomen $q_{ij}(s)$ hooguit $n - 1$ is, concluderen we dat de elementen van $(sI - A)^{-1}$ *quotiënten* van polynomen zijn met telkens de graad van het noemerpolynoom *groter* dan de graad van het tellerpolynoom. Hetzelfde geldt dus voor de elementen van de matrix $C(Is - A)^{-1}B$: allen zijn *quotiënten van polynomen met graad van het noemerpolynoom groter dan van het tellerpolynoom.*

2.2.4 Het toestandsrealisatieprobleem

Andersom is aan te tonen dat iedere $p \times m$ matrix $G(s)$ die te schrijven is als een constante $p \times m$ matrix D en een $p \times m$ matrix bestaande uit quotiënten van polynomen met graad van het noemerpolynoom groter dan van het tellerpolynoom te schrijven is als $C(Is-A)^{-1}B+D$ voor een zekere n, en zekere $p \times n$ matrix C, $n \times n$ matrix A en $n \times m$ matrix B, en dus de overdrachtsmatrix van een lineair tijdsinvariante ingangs-toestands-uitgangssysteem is! We zullen dit alleen aantonen voor het geval $p = m = 1$. Zij dus

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} + d \tag{2.65}$$

met $q(s)$ en $p(s)$ polynomen, met graad $p >$ graad q. Zij graad $p = n$. Door deling van $q(s)$ en $p(s)$ met eenzelfde constante mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat

$$\begin{aligned} p(s) &= s^n \quad + \quad p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1 s + p_0 \\ q(s) &= \qquad\qquad q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_1 s + q_0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

We beschouwen eerst het geval dat $d = 0$ en $q(s) = 1$. We zullen nu eerst een heuristisch argument geven, op basis van de volgende bekende eigenschap van Laplace transformatie.

Propositie 2.2.5. Zij $Z(s) = \int_0^\infty z(t)e^{-st}dt$ de Laplace getransformeerde van $z(t) \in \mathbb{R},\ t \geq 0$. Dan is de Laplace getransformeerde van $\dot{z}(t),\ t \geq 0$, gelijk aan $sZ(s) - z(0)$.

Bewijs. Door partiëel integreren volgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{z}(t)e^{-st}dt &= z(t)e^{-st}]_0^\infty + s\int_0^\infty z(t)e^{-st}dt \\ &= -z(0) + sZ(s) \end{aligned}$$

∎

Evenzo kunnen we aantonen dat (met L de Laplace transformatie aanduidend)

$$\begin{aligned} L(\ddot{z}) &= sL(\dot{z}) = s^2 Z(s), \text{indien } z(0) = \dot{z}(0) = 0 \\ L(z^{(3)}) &= sL(\ddot{z}) = s^3 Z(s), \text{indien } z(0) = \dot{z}(0) = \ddot{z}(0) = 0 \\ &\vdots \\ L(z^{(n)}) &= s^n Z(s), \text{indien } z(0) = \dot{z}(0) = \cdots = z^{(n-1)}(0) = 0 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Dit suggereert voor de overdrachtsfunctie $G(s) = \frac{1}{s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1 s + p_0}$ de hogere orde differentiaalvergelijking

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_1\frac{dy}{dt} + p_0 y = u \tag{2.68}$$

Zoals bekend kan de hogere orde differentiaalvergelijking (2.68) herschreven worden als het volgende *stelsel eerste orde* differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.69}$$

waar we de laatste vergelijking als (triviale) uitgangsvergelijking hebben toegevoegd. De overdrachtsfunctie van het lineaire tijdsinvariante systeem (2.69) is inderdaad gelijk aan $\frac{1}{p(s)}$, zoals direkt is na te gaan (zie Opgave 2.5).
Merk op dat de *toestandsvektor* $x(t)$ in (2.69) een eenvoudige interpretatie heeft: het is de vektor bestaande uit $y(t)$ en haar afgeleiden tot en met orde $n-1$. (Merk verder op dat de voorwaarden $y(0) = \dot{y}(0) = \cdots = y^{n-1}(0) = 0$ voor Laplace transformatie zoals voorkomend in (2.67) precies overeenkomen met de conditie $x(0) = 0$.)

Beschouw vervolgens een algemeen $(n-1)$-ste graadspolynoom $q(s)$ zoals in (2.66). Het heuristische argument boven suggereert om de hogere orde differentiaalvergelijking

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d^n}{dt^n} y(t) + p_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + p_1\tfrac{dy(t)}{dt} + p_0 y(t) = \\
&q_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + \cdots + q_1\tfrac{du}{dt}(t) + q_0 u(t)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

te beschouwen. Om hiervoor tot een toestandsvorm te komen beschouwen we eerst de gerelateerde vergelijking in een hulpvariabele $v(t)$, gegeven door

$$\frac{d^n v}{dt^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + \cdots + p_1\frac{dv}{dt} + p_0 v = u \tag{2.71}$$

Deze vergelijking wordt beschreven door een ingangs-toestands-uitgangssysteem als in (2.69) met uitgang $v(t)$, en toestand $x(t) = [v(t), v^{(1)}(t), \cdots, v^{(n-1)}(t)]^T$. Beschouw nu de *polynomen* (in de variabele $\frac{d}{dt}$) $q(\frac{d}{dt}) = q_0 + q_1\frac{d}{dt} + \cdots + q_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$ en $p(\frac{d}{dt}) = p_0 + p_1\frac{d}{dt} + \cdots + p_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \frac{d^n}{dt^n}$. Wegens (2.71) geldt dan

$$p(\frac{d}{dt})[q(\frac{d}{dt})v(t)] = q(\frac{d}{dt})p(\frac{d}{dt})v(t) = q(\frac{d}{dt})u(t) \tag{2.72}$$

en wegens (2.70) geldt derhalve

$$q(\frac{d}{dt})v(t) = y(t) \tag{2.73}$$

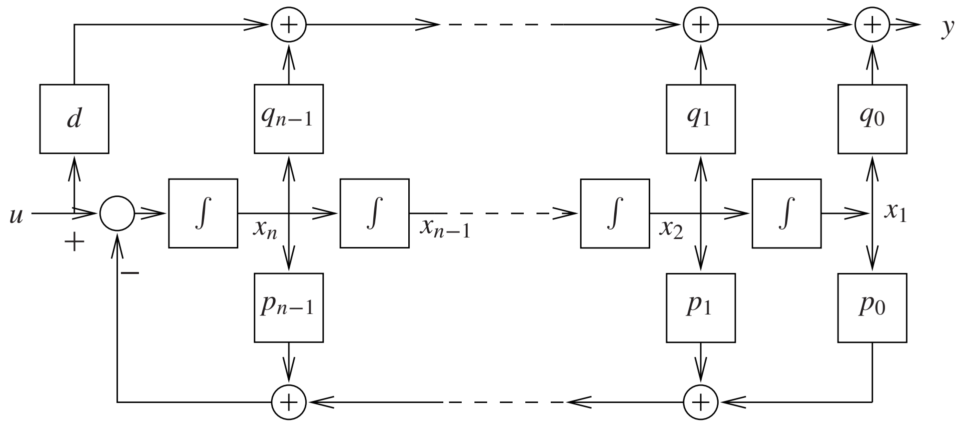
ofwel uitgeschreven,

$$q_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + q_{n-2}\frac{d^{n-2}v}{dt^{n-2}} + \cdots + q_1\frac{dv}{dt} + q_0 v = y. \tag{2.74}$$

Omdat $x(t) = [v(t), v^{(1)}(t), \cdots, v^{(n-1)}(t)]^T$ verkrijgen we dus het ingangs-toestands-uitgangssysteem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} q_0 & \cdots & q_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + du(t), \end{aligned} \tag{2.75}$$

waar we in de uitgangsvergelijking de term $du(t)$ hebben toegevoegd voor het geval $d \neq 0$. De overdrachtsfunctie van (2.75) wordt inderdaad gegeven door $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} + d$, zoals direct is na te gaan (zie Opgave 2.6). Het ingangs-toestands-uitgangssysteem (2.75) heet wel de "regelaar-kanonieke" toestandsrepresentatie van $G(s)$.
Schematisch kunnen we het ingangs-toestands-uitgangssysteem (2.75) met het volgende blokschema weergeven (zie Figuur 2.4). In dit blokschema geeft een doosje $\boxed{\int}$ *inte-*



Figuur 2.4: Regelaar-kanonieke toestandsrepresentatie

gratie aan, en staat als zodanig voor het ingangs-toestands-uitgangssysteem (*de zuivere integrator*)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= x \end{aligned} \tag{2.76}$$

met overdrachtsfunctie $\frac{1}{s}$. De doosjes $\boxed{d}$, $\boxed{p_0}$, $\boxed{p_1}$, $\cdots$, $\boxed{q_0}$, $\boxed{q_1}$, $\cdots$ etc. geven *vermenigvuldiging* aan met de factoren $p_0, p_1, \cdots, q_0, q_1, \cdots$. Tenslotte geeft $\oplus$ de *optelling* van signalen weer. Het blokschema in Figuur 2.4 geeft dus een concrete optie om een gegeven overdrachtsfunctie te kunnen *realiseren* (construeren) indien we over elementen (digitaal of analoog) beschikken die kunnen *integreren, vermenigvuldigen met een constante* en *optellen*.
We merken nog op dat we, vanuit een naief standpunt bezien, de overdrachtsfunctie $\frac{q(s)}{p(s)} + d$ ook zouden kunnen implementeren door aan het systeem (2.69) in plaats van u de ingang $q_0u + q_1\dot{u} + \cdots + q_{n-1}u^{(n-1)}$ toe te voeren. We hebben dan echter *extra* elementen nodig die een functie *differentiëren*. De overdrachtsfunctie van zo'n differentiator is volgens Propositie 2.2.5 gelijk aan $G(s) = s$. In tegenstelling tot integratoren zijn differentiatoren lastig te implementeren, vooral omdat de versterking $\mid G(i\omega) \mid = \mid i\omega \mid = \omega$ naar oneindig gaat voor $\omega \to \infty$.

Opmerking

De toestandsvector $x = [v, \dot{v}, \cdots, v^{(n-1)}]^T$ in (2.75) is moeilijker interpreteerbaar dan voor het geval $q(s) = 1$, in welk geval (zie (2.69)) $x = [y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}]^T$. Niettemin is x ook voor een algemeen polynoom $q(s)$ uit te drukken als een functie van y en afgeleiden, *en* u en afgeleiden. Vat namelijk (2.71) en (2.73) samen met

$$\begin{bmatrix} p(\frac{d}{dt}) \\ q(\frac{d}{dt}) \end{bmatrix} v(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

Omdat $p(s)$ en $q(s)$ geen gemeenschappelijke nulpunten hebben levert het Euclidisch delingsalgoritme (zie Opgave 2.12) toegepast op $p(s)$ gedeeld door $q(s)$ nieuwe polynomen $a(s) = a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-2}s^{n-2}$ en $b(s) = b_0 + b_1s + \cdots + b_{n-1}s^{n-1}$ zodanig dat

$$a(s)p(s) + b(s)q(s) = 1 \tag{2.78}$$

Voorvermenigvuldiging van (2.77) met de vector $[a(\frac{d}{dt})\vdots b(\frac{d}{dt})]$ levert dan

$$\begin{aligned} v(t) &= [a(\tfrac{d}{dt}) \;\; b(\tfrac{d}{dt})] \begin{bmatrix} p(\frac{d}{dt}) \\ q(\frac{d}{dt}) \end{bmatrix} v(t) = [a(\tfrac{d}{dt}) \;\; b(\tfrac{d}{dt})] \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \\ &= a(\tfrac{d}{dt})u(t) + b(\tfrac{d}{dt})y(t) \end{aligned} \tag{2.79}$$

ofwel uitgeschreven

$$v(t) = a_0u(t) + a_1\dot{u}(t) + \cdots + a_{n-2}u^{(n-2)}(t) + b_0y(t) + \cdots + b_{n-1}y^{(n-1)}(t) \tag{2.80}$$

Tenslotte merken we op dat het ingangs-toestands-uitgangssysteem (2.75) zeker niet het enige systeem is met de overdrachtsfunctie $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} + d$. Dit komt doordat we de toestandsvector x altijd naar een andere toestandsvector z kunnen transformeren *zonder* de overdrachtsfunctie te veranderen. Immers, zij T een willekeurige inverteerbare $n \times n$ matrix, en definieer een nieuwe toestandsvector z middels $z = T^{-1}x$. Beschouw nu het getransformeerde systeem (zie (2.24), (2.25))

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{B}u \qquad \tilde{A} = T^{-1}AT,\ \tilde{B} = T^{-1}B, \\ y &= \tilde{C}z + Du, \quad \tilde{C} = CT \end{aligned} \tag{2.81}$$

Dan is de overdrachtsfunctie van (2.81) gelijk aan

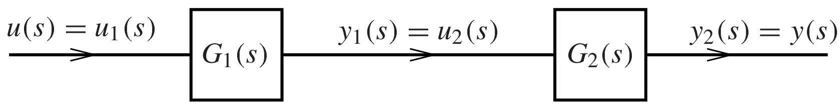
$$\begin{aligned} &\tilde{C}(Is - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + D = CT(Is - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B + D = \\ &= CTT^{-1}(Is - A)^{-1}TT^{-1}B + D = C(Is - A)^{-1}B + D \end{aligned} \tag{2.82}$$

en dus *ook* gelijk aan de overdrachtsfunctie $\frac{q(s)}{p(s)} + d$! We noemen daarom het getransformeerde systeem (2.81) *equivalent* met het oorspronkelijke systeem (2.75): het ingangs-uitgangs gedrag van beide systemen is gelijk.

2.2.5 Interconnectie van systemen

Overdrachtsmatrices vormen een compacte beschrijving van het ingangs-uitgangsgedrag van een ingangs-toestands-uitgangssysteem, en zijn zeer handig in de beschrijving van systemen die aan elkaar *gekoppeld* zijn; in het bijzonder middels de volgende drie koppelwijzen (interconnecties)

1. **serieschakeling** (Figuur 2.5)
   De overdrachtsmatrix (van $U(s)$ naar $Y(s)$) van het geïnterconnecteerde systeem

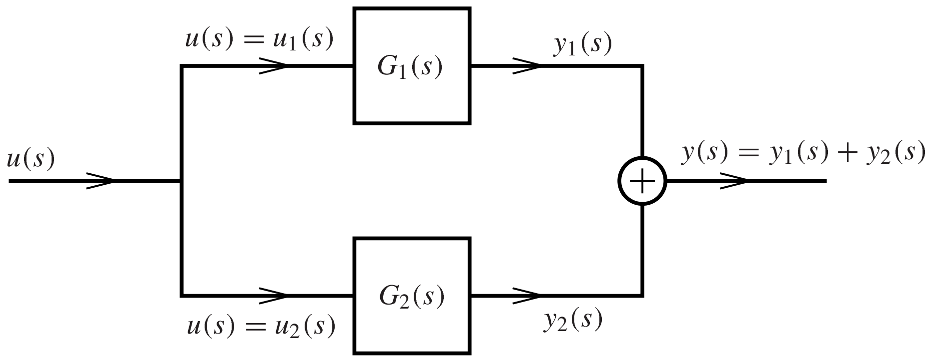


Figuur 2.5: Serieschakeling.

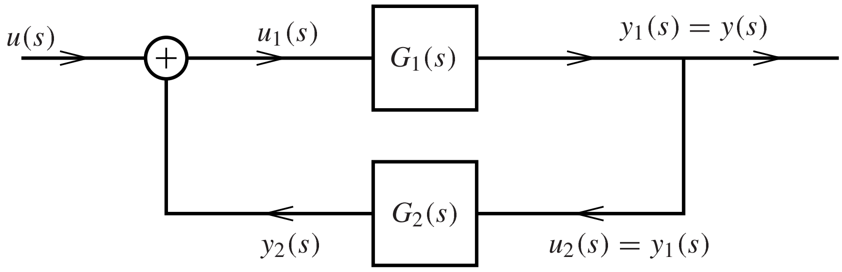
   is $G(s) = G_2(s)G_1(s)$.

2. **parallelschakeling** (Figuur 2.6)
   De overdrachtsmatrix is $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$.

3. **terugkoppeling** (Figuur 2.7)
   De overdrachtsmatrix $G(s)$ van $U(s)$ naar $Y(s)$ bepalen we als volgt:



Figuur 2.6: Parallelschakeling.



Figuur 2.7: Terugkoppeling.

$$\begin{aligned} U_1(s) &= U(s) + G_2(s)Y(s) \\ Y(s) &= G_1(s)U_1(s) \end{aligned}$$

Dit geeft $Y(s) = G_1(s)(U(s) + G_2(s)Y(s))$. Oplossen naar $Y(s)$ geeft

$$Y(s) = \underbrace{[I - G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)}_{G(s)} U(s)$$

(Merk op dat we hierbij *aannemen* dat de overdrachtsmatrices G_1 en G_2 zodanig zijn dat det $[I - G_1(s)G_2(s)]$ niet nul is voor iedere $s \in \mathbb{C}$; dit zou impliceren dat $G(s)$ nergens gedefinieerd is). Terugkoppeling middels een geschikt gekozen overdrachtsmatrix $G_2(s)$ is een veel gebruikt middel om de dynamische karakteristieken van het systeem met overdrachtsmatrix $G_1(s)$ te *verbeteren*, en is daarmee een basiselement van de *regeltheorie*.

2.3 Discrete tijd

Tot slot zullen we kort schetsen hoe de tot dusver behandelde theorie voor lineaire tijdsinvariante ingangs-toestands-uitgangssystemen in *continue tijd* kan worden aangepast tot het *discrete tijd geval*

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \quad , x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k \in \mathbb{Z} \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \quad , y \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{2.83}$$

Oplossingen zijn in het discrete tijd geval gemakkelijker af te leiden dan in het continue tijd geval (vergelijk Proposities 2.1.1, 2.1.2):

Propositie 2.3.1. De oplossing van

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(k_0) = x_0 \tag{2.84}$$

wordt gegeven door

$$x(k) = A^{k-k_0}x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-1-j}Bu(j) \tag{2.85}$$

Bewijs. Dit volgt door direct invullen van (2.85) in (2.84):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A^{k+1-k_0}x_0 + \sum_{j=k_0}^{k} A^{k-j}Bu(j) = \\ &= A(A^{k-k_0}x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-1-j}Bu(j)) - A^{k-k}Bu(k) \\ &= Ax(k) + Bu(k), \end{aligned}$$

of door op basis van (2.84) successievelijk $x(k_0+1), x(k_0+2)$, etc. te bepalen (zie Opgave 2.8). ∎

In het bijzonder volgt dat de oplossing van $x(k+1) = Ax(k),\ x(k_0) = x_0$, gegeven wordt door

$$x(k) = A^{k-k_0}x_0 \tag{2.86}$$

Hoewel de termen A^{k-k_0} en A^{k-1-j} in (2.85) direct te bepalen zijn, is het voor de dynamische analyse ook nu voordelig om naar de *eigenwaarden* en *eigenvectoren* van A te kijken. Zij $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A, dan nemen we weer het bestaan van bijbehorende onafhankelijke eigenvectoren $v_1, \cdots, v_n$ aan. Wegens (2.14) geldt dan, met $T = [v_1, \cdots, v_n]$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ofwel } A = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} T^{-1}$$

en i.p.v. (2.16) verkrijgen we (zoals direct is na te gaan)

$$A^k = T \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} T^{-1} \tag{2.87}$$

Derhalve wordt de oplossing van $x(k+1) = Ax(k), x(0) = x_0$, gegeven door een lineaire combinatie

$$x(k) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i^k v_i, \quad \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)^T, \quad \mu = T^{-1}x_0 \tag{2.88}$$

van de "basisoplossingen" $\lambda_i^k v_i,\ k \in \mathbb{Z},\ i = 1, \cdots, n$.
De discrete tijd versie van Propositie 2.1.7 dient op één belangrijk punt te worden aangepast:

Propositie 2.3.2. Beschouw het stelsel differentievergelijkingen $x(k+1) = Ax(k)$, $x(0) = x_0$. Indien de eigenwaarden $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ van A voldoen aan

$$| \lambda_i | < 1,\ i = 1, \cdots, n,$$

dan geldt voor alle x_0 dat de oplossing $x(k),\ k \geq 0$, voldoet aan

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = 0 \tag{2.89}$$

Bewijs. Er geldt $| \lambda_i^k | = | \lambda_i |^k \to 0$, indien $| \lambda_i | < 1$. ∎

Wegens (2.85) en $y(k) = Cx(k) + Du(k)$ wordt het uitgangssignaal $y(k)$ als volgt gegeven als functie van de begintoestand $x(k_0) = x_0$ en het ingangssignaal $u(k)$, $k = k_0, k_0 + 1, \cdots$,

$$y(k) = CA^{k-k_0}x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} CA^{k-1-j}Bu(j) + Du(k) \tag{2.90}$$

In het bijzonder geldt voor $k_0 = 0$ en $x_0 = 0$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j}Bu(j) + Du(k) \tag{2.91}$$

De rol van de Laplace-transformatie wordt in het discrete tijd geval overgenomen door de zogenaamde *z-transformatie*; we definiëren

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}, \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} \tag{2.92}$$

met $z \in \mathbb{C}$ zodanig dat de reeksen convergeren. Er kan direkt worden nagegaan – vergelijk met (2.58) –, dat (zie Opgave 2.9)

$$Y(z) = \left[C(zI_n - A)^{-1}B + D\right]U(z) \tag{2.93}$$

en $G(z) := C(zI_n - A)^{-1}B + D$ wordt weer de *overdrachtsmatrix* genoemd.

Een toestandsrepresentatie van de *scalaire* ($p = m = 1$) overdrachtsmatrix $G(z) = \frac{q(z)}{p(z)} + d$, met

$$\begin{aligned} p(z) &= z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \cdots + p_1 z + p_0 \\ q(z) &= q_{n-1}z^{n-1} + \cdots + q_1 z + q_0 \end{aligned} \tag{2.94}$$

wordt, analoog aan (2.75), gegeven als

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} q_0 & \cdots & q_{n-1} \end{bmatrix} x(k) + du(k) \end{aligned} \tag{2.95}$$

2.4 Samenvatting van Hoofdstuk 2

De oplossingen van een lineair tijdsinvariant systeem kunnen expliciet bepaald worden d.m.v. de berekening van de matrix e-macht e^{At}. e^{At} kan berekend worden door de eigenwaarden en eigenvectoren van A uit te rekenen.
Het gedrag van oplossingen van $\dot{x} = Ax$ wordt bepaald door de eigenwaarden van A. In het bijzonder convergeren alle oplossingen naar 0 indien de eigenwaarden allen een reëel deel kleiner dan 0 bezitten.
De stationaire responsie op een ingangssignaal $u(t) = ce^{st}$ is $y_s(t) = be^{st}$ met $b = G(s)c$, waarbij $G(s) = C(Is - A)^{-1}B + D$ de overdrachtsmatrix van het systeem is. In het bijzonder is de stationaire responsie op een zuivere trilling met frequentie ω weer een zuivere trilling met frequentie ω (met andere amplitude en fase).
Andersom kan op basis van een rationale functie $G(s)$ een lineair tijdsinvariant ingangs-toestands-uitgangssysteem gedefinieerd worden met overdrachtsmatrix $G(s)$. De theorie verloopt voor discrete tijd geheel analoog.

3

Systemen zonder opgelegde ingangs-uitgangsstruktuur

3.1 Inleiding

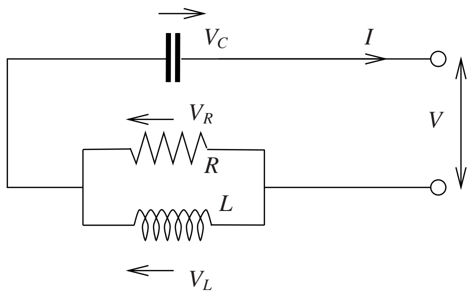
Ingangs-toestands-uitgangssystemen, zoals gedefinieerd in Hoofdstuk 1 en geanalyseerd in Hoofdstuk 2 voor het lineaire en tijdsinvariante geval, vormen een zeer belangrijke klasse van dynamische systemen, zowel in continue als in discrete tijd. Toch is voor sommige doeleinden deze klasse te specifiek, of vormt een ongewenst keurslijf. Dit heeft twee redenen: de eerste heeft te maken met de opgelegde *ingangs-uitgangsstruktuur*, en de tweede met de veronderstelde *onafhankelijkheid van toestandsvariabelen*.

3.1.1 Ingangs-uitgangsstruktuur

Laten we eerst de ingangs-uitgangsstruktuur beschouwen. Het woord "ingang" (Engels: input) draagt twee, met elkaar verweven, betekenissen met zich. De eerste betekenis is dat de waarde van iedere ingangsvariabele door de omgeving van het systeem kan worden *opgelegd*. Dit is vooral duidelijk indien we ingangsvariabele als stuur- (Engels: control) variabele interpreteren. Merk echter op dat deze betekenis van ingangsvariabele "context-afhankelijk" is: *hetzelfde* (fysische, economische, etc.) systeem kan in een andere omgeving functioneren, waarbij een *andere* uitwendige variabele de ingangsvariabele is.

Voorbeeld 3.1.1. Beschouw een elektrische weerstand met uitwendige variabelen V (spanning) en I (stroom), verbonden door de wet van Ohm: $V = RI$, voor een constante R. In sommige gevallen zal de omgeving van de weerstand de spanning voorschrijven $(V = u)$ waarop de weerstand een stroom $I = \frac{V}{R}$ zal leveren $(I = y)$. In andere gevallen zal de omgeving een stroom voorschrijven $(I = u)$, met resulterende uitgang de spanning $y = V = RI$.

■



Figuur 3.1: RLC netwerk.

Voorbeeld 3.1.2. Beschouw het volgende RLC-netwerk in Figuur 3.1 (vergelijk met Voorbeeld 1.2.7). Volgens de spannings- en stroomwetten van Kirchhoff geldt

$$\begin{aligned} V &= V_C + V_L, \quad V_L = V_R \\ I &= I_C = I_R + I_L \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sluiten we nu het netwerk aan op een spanningsbron, dan krijgen we gebruikmakend van de constitutieve vergelijkingen voor (lineaire) condensatoren, zelfindukties en weerstanden (zie (1.7)) het ingangs-toestands-uitgangssysteem

$$\begin{aligned} \dot{q} &= I_C = I_R + I_L = \tfrac{1}{R}V_L + \tfrac{1}{L}\varphi \\ &= \tfrac{1}{L}\varphi + \tfrac{1}{R}(V - V_C) = \tfrac{1}{L}\varphi - \tfrac{1}{RC}q + \tfrac{1}{R}V \\ \dot{\varphi} &= V_L = -V_C + V = -\tfrac{1}{C}q + V \\ I &= \tfrac{1}{L}\varphi - \tfrac{1}{RC}q + \tfrac{1}{R}V \end{aligned} \tag{3.2}$$

met als ingang de spanning V geleverd door de spanningsbron en als uitgang I de stroom door de spanningsbron.
Indien we echter het netwerk aansluiten op een *stroom*bron, dan krijgen we een *ander* ingangs-toestands-uitgangssysteem, namelijk

$$\begin{aligned} \dot{q} &= I \\ \dot{\varphi} &= -\tfrac{R}{L}\varphi + RI \\ V &= \tfrac{1}{C}q - \tfrac{R}{L}\varphi + RI \end{aligned} \tag{3.3}$$

met ingang I en uitgang V. ■

Voorbeeld 3.1.3. Een model voor een nationale economie dat iets verfijnder is dan het model behandeld in Voorbeeld 1.2.4 wordt verkregen door i.p.v. $c(k) = my(k)$ te stellen

$$\begin{aligned} c(k+1) &= my(k) \\ i(k+1) &= \mu[c(k+1) - c(k)] \end{aligned} \tag{3.4}$$

In dit geval is de consumptie in een bepaald jaar evenredig met het nationaal product van het *voorafgaande* jaar, terwijl de investeringen evenredig zijn met de *toename* van de consumptie. Indien we als ingangsvariabele weer de overheidsuitgaven $u(k)$ nemen, en als uitgang het nationale product $y(k)$, dan brengen we dit als volgt in toestandsvorm. Er geldt

$$\begin{aligned} i(k+1) &= -\mu c(k+1) = -\mu c(k) \\ c(k+1) &= m(i(k) - \mu c(k) + (1+\mu)c(k) + u(k)) \\ &= m(i(k) - \mu c(k)) + m(1+\mu)c(k) + mu(k) \end{aligned}$$

Als we derhalve de toestand $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ definiëren middels

$$\begin{aligned} x_1(k) &= i(k) - \mu c(k) \\ x_2(k) &= c(k) \end{aligned}$$

dan verkrijgen we het ingangs-toestands-uitgangssysteem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ m & m(1+\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1+\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + u(k) \end{aligned} \tag{3.5}$$

We kunnen echter ook het nationaal product $y(k)$ als ingang voorschrijven en dan de benodigde overheidsuitgaven $u(k)$ als uitgang aflezen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} y(k) \\ u(k) &= -\begin{bmatrix} -1 & 1+\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + y(k) \end{aligned} \tag{3.6}$$

■

Conclusie is dat het RLC netwerk van Voorbeeld 3.1.2 aanleiding geeft tot twee *verschillende* ingangs-toestands-uitgangssystemen, afhankelijk van het feit of het netwerk op een spannings-, dan wel op een stroombron wordt aangesloten. De specificatie van

het ingangs-toestands-uitgangsmodel van het RLC-netwerk *hangt er dus vanaf aan welk ander systeem het RLC-netwerk wordt gekoppeld.* In het algemeen is dit een ongewenste eigenschap voor een *modulaire* specificatie, waar we een (complex) systeem willen beschrijven als de *interconnectie* van verschillende, *onafhankelijk van elkaar* gespecificeerde, subsystemen. Dezelfde conclusie geldt, mutatis mutandis, voor Voorbeelden 3.1.1 en 3.1.3.
Een tweede betekenis die aan het begrip "ingang" verbonden wordt is dat ingangsvariabelen "vrije" variabelen zijn, in de zin dat met *ieder* ingangssignaal een oplossing van de systeemvergelijkingen correspondeert. Dus het systeem dient ieder ingangssignaal te "accepteren". In de automatentheorie en theoretische informatica wordt een soortgelijke eigenschap wel "receptiviteit" genoemd. We merken op dat de ingangsvariabelen in de definitie van ingangs-toestands-uitgangssystemen inderdaad deze eigenschap van vrije variabelen hebben: ieder ingangssignaal (afgezien van een technische integreerbaarheidseis!) genereert een oplossing van het systeem. Deze betekenis van vrije variabele hoeft echter niet *a priori* in de beschrijving van het systeem meegenomen te worden: een wiskundige analyse kan uitwijzen welke van de uitwendige variabelen voor vrije variabele in aanmerking komen. Bovendien zal de keuze van de vrije variabelen i.h.a. niet uniek zijn.

Voorbeeld 3.1.4. Beschouw het RLC netwerk in Voorbeeld 3.1.2, met uitwendige variabelen V en I. Zowel V als I kunnen willekeurig worden voorgeschreven (maar niet beiden tegelijk!) ■

Voorbeeld 3.1.5. Beschouw de zuivere integrator

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ y &= x \end{aligned} \tag{3.7}$$

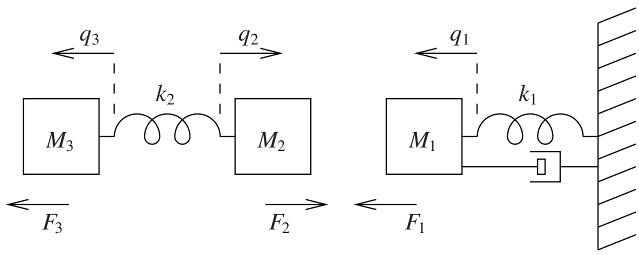
Het is duidelijk dat u een vrije variabele is. Kan ook y als vrije variabele worden beschouwd? Met andere woorden, bestaat er voor *ieder* signaal $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, een oplossing $x(t)$ en $u(t)$ van (3.6)? Het antwoord op deze vraag is niet eenduidig. De eigenschap geldt zeker voor *differentieerbare* functies $y(t)$. Anderzijds is het duidelijk dat het bestaan van een zinvol oplossingsconcept van (3.6) voor niet-differentieerbare functies $y(t)$ discutabel is (zie ook Opgave 3.1). Merk in dit verband op dat de overgang van y naar u een *differentiator* is, met overdrachtsfunctie $G(s) = s$. Dezelfde discussie geldt voor ingangs-toestands-uitgangssystemen met $D = 0$ (of algemener, D niet-inverteerbaar). Zo is er in Voorbeeld 1.2.7 een duidelijke voorkeur om de *spanning* als ingangsvariabele te nemen i.p.v. de *stroom*. ■

We concluderen dat het in sommige gevallen beter is om de externe variabelen niet *a priori* in ingangs- en uitgangsvariabelen te verdelen (voor zover dit al mogelijk is). De resulterende generalisatie van systemen met ingangen en uitgangen naar algemene systemen met externe variabelen lijkt op de generalisatie van *functies* (van de ene variabele naar een andere) naar *relaties* (verbanden tussen de variabelen), en op de overgang van "imperatieve" specificaties naar "declaratieve" specificaties.

3.1.2 Afhankelijkheid van toestandsvariabelen

Laten we nu de evolutie van de *toestandsvariabelen* nader bekijken. In een ingangs-toestands-uitgangssysteem is elke begintoestand $x(t_0) \in X$ in principe toegelaten. In veel gevallen is echter het systeem onder beschouwing opgebouwd als *interconnectie* van kleinere subsystemen. Deze interconnecties zijn vaak van een ander type dan de serie-, parallel-, of terugkoppelingsschakelingen zoals beschouwd aan het eind van Hoofdstuk 2, en kunnen ertoe leiden dat de toestandsvariabelen van het geïnterconnecteerde systeem *afhankelijk* zijn.

Voorbeeld 3.1.6. Beschouw het massa-veer-demper systeem uit Voorbeeld 1.2.6, tesamen met een ander massa-veer systeem (Figuur 3.2). Interconnecteer beide systemen



Figuur 3.2: Interconnectie van mechanische systemen.

door de massa's m_1 en m_2 star aan elkaar te verbinden:

$$q_1 + q_2 = c \tag{3.8}$$

voor een zekere constante c, en de krachten F_1 en F_2 aan elkaar gelijk te stellen (derde wet van Newton: actie = reactie)

$$F_1 = F_2 \tag{3.9}$$

Het totale geïnterconnecteerde systeem wordt beschreven door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} I &: \quad m_1\ddot{q}_1 = -k_1 q_1 - r\dot{q}_1 + F_1 \\ II &: \quad \left\{ \begin{aligned} m_2\ddot{q}_2 &= -k_2(q_2 - q_3) + F_2 \\ m_3\ddot{q}_3 &= -k_2(q_3 - q_2) + F_3 \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{3.10}$$

tesamen met de interconnectievoorschriften (3.8) en (3.9). Toestandsvariabelen van (3.10) zijn $x = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, q_3, \dot{q}_3)^T$, maar wegens (3.8) zijn q_1 en q_2 *afhankelijk*.
■

3.2 Toestandssystemen met externe variabelen

Op basis van de voorafgaande overwegingen zullen we nu toestandssystemen invoeren die geen opgelegde ingangs-uitgangsstruktuur bezitten, en waarvan mogelijkerwijs de toestandsvariabelen afhankelijk zijn (vergelijk Definities 1.2.1 en 1.2.5).

Definitie 3.2.1 (Toestandssystemen met externe variabelen). Een toestandssysteem met externe variabelen *in discrete tijd* wordt gegeven door de tijdsas $T = \mathbb{Z}$, een ruimte van externe variabelen W, een toestandsruimte X, en een stelsel *impliciete differentie-vergelijkingen*

$$F(x(k+1), x(k), w(k), k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.11}$$

met F een afbeelding van $X \times X \times W \times \mathbb{Z}$ naar een zekere ruimte $\mathbb{R}^k$.
Een toestandssysteem met externe variabelen in *continue tijd* wordt gegeven door de tijdsas $T = \mathbb{R}$, een ruimte van externe variabelen $W = \mathbb{R}^q$, een toestandsruimte $X = \mathbb{R}^n$ en een stelsel *impliciete differentiaalvergelijkingen*

$$F(\dot{x}(t), x(t), w(t), t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

met F een afbeelding van $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$ naar een zekere $\mathbb{R}^k$. ∎

Opmerking Definitie 3.2.1 is een generalisatie van Definitie 1.2.1. Immers, beschouw een ingangs-toestands-uitgangssysteem als in Definitie 1.2.1. Definiëer nu $W = U \times Y$ en F als

$$F(x(k+1), x(k), (u(k), y(k)), k) = \begin{pmatrix} x(k+1) - f(x(k), u(k), k) \\ y(k) - h(x(k), u(k), k) \end{pmatrix}$$

Analoog voor continue-tijd systemen (Definitie 1.2.5): neem $W = U \times Y = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ en definiëer

$$F(\dot{x}(t), x(t), (u(t), y(t)), t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) - f(x(t), u(t), t) \\ y(t) - h(x(t), u(t), t) \end{pmatrix}$$

Impliciete differentiaalvergelijkingen (3.12) worden ook wel *differentiaal-algebraïsche vergelijkingen* (DAEs) genoemd. ∎

Voorbeeld 3.2.2 (Formele taal). Beschouw een eindige verzameling A, het *alfabet* genaamd. De elementen van A worden *symbolen* genoemd. Een eindig rijtje van symbolen heet een *woord*. Laat A^* de verzameling van alle woorden. Een *formele taal* $\mathcal{L}$ is een deelverzameling van A^*. We kunnen met $\mathcal{L}$ éénduidig een *systeem* in discrete tijd associëren, op de volgende wijze. We voegen aan A een nieuw symbool $\square$ toe, het *blanco symbool*. Definieer nu $W := A \cup \{\square\}$ als de ruimte van *externe variabelen*, en het gedrag van deze externe variabelen als $B = \{w : \mathbb{Z} \to W \mid \exists k_b, k_e \in \mathbb{Z}, k_b \leq k_e$, zodanig dat $w\,|_{[k_b,k_e]} \in \mathcal{L}$, en $w(k) = \square$ voor $k < k_b$ en $k > k_e\}$. (De notatie k_b staat voor *begin*, en k_e voor *eind*.)

B bestaat dus uit alle woorden van de formele taal $\mathcal{L}$, voor en achter aangevuld met blanco symbolen. Merk op dat B gedefinieerd is als een dynamisch systeem *zonder* inwendige variabelen (i.h.b. toestandsvariabelen), *met* externe variabelen in W. Merk ook op dat het a priori geen zin heeft de variabelen in W (de symbolen A, tesamen met $\Box$) te verdelen in ingangs- en uitgangsvariabelen.
De gebruikelijke manier om een formele taal te genereren is via eindige automaten, of door middel van (verschillende soorten) grammatica's. In het geval van eindige automaten stelt men een eindige *toestandsruimte* S, een transitie-regel $R \subset S \times A \times S,\ I \subseteq S$ een verzameling van *begin*toestanden, $E \subseteq S$ een verzameling van *eind*toestanden, met als "succesvolle paden" de eindige rijtjes

$$(s_0, a_0, s_1, a_1, \cdots, s_{n-1}, a_{n-1}, s_n)$$

met $(s_i, a_i, s_{i+1}) \in R,\ i = 0, 1, \cdots, n-1$ en $s_0 \in I,\ s_n \in E$. Om dit als een toestandssysteem met externe variabelen in discrete tijd te beschrijven, voegen we nog twee toestanden aan S toe: de *bron*toestand $\circ\!\!\rightarrow$ en de *put*toestand $\rightarrow\!\!\circ$. We definiëren de uitgebreide toestandsruimte $X := S \cup \{\circ\!\!\rightarrow, \rightarrow\!\!\circ\}$, en de uitbreiding $\bar{R} \subset X \times W \times X$ van R als volgt

$$\bar{R} = R \cup \{\circ\!\!\rightarrow, \Box, I \cup \{\circ\!\!\rightarrow\}\} \cup \{E \cup \{\rightarrow\!\!\circ\}, \Box, \rightarrow\!\!\circ\}$$

Het gedrag van de toestandsvariabelen $x(k) \in \mathcal{X}$ en externe variabelen $w(k) \in W$ wordt nu beschreven door de eigenschap

$$(x(k), w(k), x(k+1)) \in \bar{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3.13}$$

benevens de eis

$$\begin{aligned} \exists k_b \leq k_e \text{ zodanig} \quad & \text{dat } x(k) = \circ\!\!\rightarrow \text{ voor } k < k_b \\ & \text{en } x(k) = \rightarrow\!\!\circ \text{ voor } k > k_e \end{aligned}$$

Het is gemakkelijk na te gaan dat de eigenschap (3.13) ook geschreven kan worden als in (3.11):

$$F(x(k+1), x(k), w(k)) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(Definieer bijvoorbeeld $F : X \times X \times W \to \mathbb{R}$ als een functie die 0 is op de punten $(x(k+1), x(k), w(k))$ zodanig dat $(x(k), w(k), x(k+1)) \in \bar{R}$, en 1 elders.) ∎

Evenals in het geval van ingangs-toestands-uitgangssystemen vormen ook in het geval van toestandssystemen met externe variabelen de lineaire en tijdsinvariante systemen een zeer belangrijke deelklasse.

Definitie 3.2.3. Een lineair tijdsinvariant toestandssysteem met externe variabelen wordt gegeven door een lineaire ruimte van externe variabelen $W = \mathbb{R}^q$, een lineaire toestandsruimte $X = \mathbb{R}^n$, en in *discrete tijd*, een lineair stelsel impliciet differentievergelijkingen

$$Kx(k+1) + Lx(k) + Mw(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3.14}$$

of, in *continue tijd*, een lineair stelsel impliciete differentiaalvergelijkingen

$$K\dot{x}(t) + Lx(t) + Mw(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.15}$$

met K, L $k \times n$ matrices en M een $k \times q$ matrix. ■

Opmerking (3.14) en (3.15) reduceren tot een ingangs-toestands-uitgangssysteem in discrete, respectievelijk, continue tijd, door te nemen

$$K = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -A \\ -C \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -B & 0 \\ -D & I \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

■

Voorbeeld 3.2.4. Beschouw als variant op Voorbeeld 1.2.4 en Voorbeeld 3.1.3 het volgende model voor een nationale economie (zie voor de betekenis van de variabelen Voorbeeld 1.2.4)

$$\begin{array}{rcl} y(k+1) - y(k) & = & ri(k) \\ i(k+1) & = & \mu\,[c(k+1) - c(k)] \\ c(k) & = & my(k) \\ y(k) - c(k) - i(k) - u(k) & = & 0 \end{array} \tag{3.17}$$

(Toename in nationaal produkt evenredig met investeringen; investeringen evenredig met toename in consumptie; consumptie evenredig met nationaal product; en een balansvergelijking.) Stel we zijn primair geïnteresseerd in de tijdsevolutie van de variabelen $u(k)$ (overheidsuitgaven) en $y(k)$ (nationaal produkt). We nemen derhalve $w(k) = \left[\begin{smallmatrix} u(k) \\ y(k) \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$. Omdat van de variabelen $i(k), c(k)$ en $y(k)$ ook de waarden op $k+1$ voorkomen, nemen we als toestandsvector $x(k) = [i(k), c(k), y(k)]^T \in \mathbb{R}^3$. (Merk op dat $y(k)$ zowel in $w(k)$ als in $x(k)$ voorkomt!). We herschrijven nu (3.17) in de vorm (3.14) als

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(k+1) \\ c(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} -r & 0 & -1 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 1 & -m \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(k) \\ c(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = 0 \end{gathered} \tag{3.18}$$

Merk op dat de toestandsvariabelen $i(k), c(k), y(k)$ *afhankelijk* zijn wegens de derde vergelijking in (3.18): $c(k) - my(k) = 0$. ■

Evenals in het geval van ingangs-toestands-uitgangssystemen in continue tijd dienen we stil te staan bij de interpretatie (de "semantiek") van de impliciete differentiaalvergelijkingen (3.12) en (3.15). Evenals voor ingangs-toestands-uitgangssystemen zullen we *continue* toestandstrajecten $x(\cdot)$ beschouwen die op een eindig aantal punten na *differentieerbaar* zijn, en verder "willekeurige" functies $w(\cdot)$, zodanig dat aan (3.12) of (3.15) is voldaan voor alle $t \in \mathbb{R}$ uitgezonderd de tijdstippen van niet-differentieerbaarheid van $x(\cdot)$.

In Hoofdstuk 1 hebben we de *toestand* van een ingangs-toestands-uitgangssysteem geïnterpreteerd als het *geheugen* van het systeem: de huidige toestand plus de toekomstige ingang bepaalt éénduidig de toekomstige toestand en toekomstige uitgang. Indien de externe variabelen niet meer a priori in ingangen en uitgangen worden onderscheiden kunnen we deze (asymmetrische) interpretatie van toestand niet meer gebruiken, maar in plaats daarvan komt de volgende "splitsingseigenschap":

Propositie 3.2.5 (Eigenschap van toestand). Zij $(x_1(\cdot), w_1(\cdot))$ en $(x_2(\cdot), w_2(\cdot))$ een oplossing van (3.12). Zij $t_0 \in \mathbb{R}$, en definieer de *concatenatie* $(x(\cdot), w(\cdot))$ van $(x_1(\cdot), w_1(\cdot))$ en $(x_2(\cdot), w_2(\cdot))$ op t_0 als

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t < t_0 \\ x_2(t), & t \geq t_0 \end{cases} \qquad w(t) = \begin{cases} w_1(t), & t < t_0 \\ w_2(t), & t \geq t_0 \end{cases}$$

Dan impliceert

$$x_1(t_0) = x_2(t_0)$$

dat ook $(x(\cdot), w(\cdot))$ een oplossing is van (3.12).

Bewijs. Omdat $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ is $x(\cdot)$ overal continu, en is differentieerbaar op een eindig aantal tijdstippen na. (Merk op dat i.h.a. $x(\cdot)$ *niet* differentieerbaar is in t_0.) Omdat (3.12) geldt voor bijna alle t zowel voor $(x_1(\cdot), w_1(\cdot))$ als voor $(x_2(\cdot), w_2(\cdot))$, geldt het dan ook voor $(x(\cdot), w(\cdot))$. ∎

3.2.1 Linearisatie

Voor de eenvoud zullen wij ons in de rest van dit hoofdstuk tot *lineaire tijdsinvariante* toestandssystemen met externe variabelen *in continue tijd* beperken. Evenals in het ingangs-uitgangsgeval is deze klasse van systemen van veel belang omdat ze (a) wiskundig gezien redelijk gemakkelijk te behandelen is, (b) veel systemen bij benadering lineair zijn, en (c) niet-lineaire systemen (3.12) lokaal te benaderen zijn door lineaire systemen (3.15). Punt (c) is weer het idee van *linearisatie*. Beschouw een oplossing $\bar{x}(\cdot), \bar{w}(\cdot)$ van (3.12), dat is

$$F(\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), \bar{w}(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.19}$$

Beschouw vervolgens een ander oplossingspaar $x(\cdot), w(\cdot)$ van (3.12), dat we ten opzichte van $\bar{x}(\cdot), \bar{w}(\cdot)$ schrijven als

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x}(t) + z(t) \\ w(t) &= \bar{w}(t) + s(t) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Invullen van (3.20) in (3.12) geeft

$$F(\dot{\bar{x}}(t) + \dot{z}(t), \bar{x}(t) + z(t), \bar{w}(t) + s(t)) = 0 \tag{3.21}$$

We nemen nu aan dat $\dot{z}(t), z(t)$ en $s(t)$ zo klein zijn dat de Taylorreeks van F om $\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), \bar{w}(t)$ tot en met de lineaire termen een goede benadering voor F vormt:

$$\begin{aligned}
&F(\dot{\bar{x}}(t) + \dot{z}(t), \bar{x}(t) + z(t), \bar{w}(t) + s(t)) \simeq \\
&F(\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), \bar{w}(t)) + \tfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), \bar{w}(t))\dot{z}(t) \\
&+ \tfrac{\partial F}{\partial x}(\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), \bar{w}(t))z(t) + \tfrac{\partial F}{\partial w}(\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), \bar{w}(t))s(t)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Invullen van (3.19) en (3.21) in (3.22) geeft bij benadering het *lineaire* systeem

$$K(t)\dot{z}(t) + L(t)z(t) + M(t)s(t) = 0 \tag{3.23}$$

met

$$\begin{aligned}
K(t) &= \tfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), \bar{w}(t)) \\
L(t) &= \tfrac{\partial F}{\partial x}(\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), \bar{w}(t)) \\
M(t) &= \tfrac{\partial F}{\partial w}(\dot{\bar{x}}(t), \bar{x}(t), w(t))
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Indien de matrices $K(t)$, $L(t)$ en $M(t)$ niet van t afhangen (bijvoorbeeld indien $\bar{x}(t)$ en $\bar{w}(t)$ een evenwichtsoplossing zijn, en dus *constant* zijn), dan is het resultaat een lineair tijdsinvariant systeem (3.15).

3.2.2 Interconnectie van systemen

Een belangrijke eigenschap van de klasse van toestandssystemen met externe variabelen is dat deze klasse *gesloten* is m.b.t. *interconnectie* van systemen, in de zin dat een willekeurige interconnectie van een aantal toestandssystemen met externe variabelen weer een toestandssysteem met externe variabelen oplevert. We zullen ons voor de eenvoud beperken tot *lineaire* interconnecties van *twee lineaire* systemen.

Definitie 3.2.6. Beschouw twee toestandssystemen Σ_i met externe variabelen

$$\Sigma_i : K_i\dot{x}_i + L_i x_i + M_i w_i = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.25}$$

(a) Zij $w_1 = w_2 = w$ (gemeenschappelijke externe variabelen; Engels: shared external variables). De *interconnectie* van Σ_1 en Σ_2 wordt gegeven als

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} w = 0 \tag{3.26}$$

(b) Zij $w_1 \in \mathbb{R}^{q_1},\ w_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$. Een *interconnectie* van Σ_1 en Σ_2 correspondeert met een stelsel lineaire vergelijkingen

$$C_1 w_1 + C_2 w_2 + C w = 0 \tag{3.27}$$

met $w \in \mathbb{R}^q$ een vector van *nieuwe* externe variabelen. Het geïnterconnecteerde systeem wordt nu gegeven als

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{bmatrix} w = 0\end{aligned} \tag{3.28}$$

■

Opmerking Vergelijkingen (3.28) beschrijven, strikt gesproken, nog geen toestandssysteem met externe variabelen. Hiertoe dienen eerst nog de variabelen w_1 en w_2 uit de vergelijkingen (3.28) te worden opgelost; zie Opgave 3.3.

Voor de *analyse* van (3.15) is het vaak handig is om de vergelijkingen tot een *equivalent* stelsel te kunnen transformeren.

Propositie 3.2.7. Beschouw een toestandssysteem met externe variabelen

$$K\dot{x} + Lx + Mw = 0, \quad K\ \ k \times n,\ L\ \ k \times n,\ M\ \ k \times q \tag{3.29}$$

Zij S een inverteerbare $k \times k$ matrix. Dan heeft het *getransformeerde* stelsel

$$SK\dot{x} + SLx + SMw = 0 \tag{3.30}$$

dezelfde oplossingen als (3.29).

Bewijs. Het is triviaal dat indien $(x(\cdot), w(\cdot))$ aan (3.29) voldoen, dan ook aan (3.30). Andersom, indien $(x(\cdot), w(\cdot))$ aan (3.30) voldoen, dan door voorvermenigvuldiging met S^{-1} ook aan (3.29). ■

Opmerking Dezelfde propositie geldt ook voor systemen in *discrete tijd*.

Propositie 3.2.7 is o.a. nuttig in het *expliciet* maken van de *afhankelijkheidsrelaties* waaraan de toestandsvariabelen x in (3.29) voldoen. Immers, stel rang $K = r(\leq k)$. Permuteer nu de rijen van K zodanig dat de eerste r rijen onafhankelijk zijn. Zo'n permutatie correspondeert met voorvermenigvuldiging met een inverteerbare matrix S (met alleen nullen en enen!), zoals gemakkelijk is na te gaan. Door "schoonvegen" m.b.v. de eerste r rijen kunnen we nu bewerkstelligen dat de laatste $k - r$ rijen van K

nul worden. Ook dit schoonvegen correspondeert met een voorvermenigvuldiging met een inverteerbare matrix S. Derhalve bestaat er een inverteerbare matrix S zodanig dat

$$SK = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

met K_1 een $r \times n$ matrix met rang r. Voorvermenigvuldiging van het hele stelsel (3.29) met S levert

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x} + SLx + SMw = 0$$

Schrijf nu $SL = \left[\begin{smallmatrix} L_1 \\ L_2 \end{smallmatrix}\right]$, $SM = \left[\begin{smallmatrix} M_1 \\ M_2 \end{smallmatrix}\right]$ met L_1 $k \times n$ en M_1 $k \times q$ matrices. Dan krijgen we

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} w = 0,$$

hetgeen de volgende statische relatie tussen x en w impliceert:

$$L_2 x + M_2 w = 0 \tag{3.32}$$

Op dezelfde wijze kunnen we een inverteerbare $(n-k) \times (n-k)$ matrix S_2 vinden zodanig dat

$$S_2 M_2 = \begin{bmatrix} M_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

met alle rijen van M_{21} onafhankelijk. Voorvermenigvuldiging van (3.32) met S_2 levert dan (door te schrijven $S_2 L_2 = \left[\begin{smallmatrix} L_{21} \\ L_{22} \end{smallmatrix}\right]$ corresponderend met (3.33)) de volgende statische afhankelijkheidsrelaties in x

$$L_{22} x = 0 \tag{3.34}$$

Voorbeeld 3.2.8. Beschouw het economisch model (3.18). Omdat de eerste 2 rijen van K onafhankelijk zijn en de laatste 3 rijen reeds nul zijn, nemen we $S = I$, en we krijgen voor (3.32)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -m \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(k) \\ c(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = 0 \tag{3.35}$$

Hier zijn de laatste 2 rijen van $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ onafhankelijk, en de eerste rij is nul. Dus de statische afhankelijkheid van de toestandsvariabelen $i(k)$, $c(k)$, $y(k)$ zoals in (3.34) wordt gegeven door

$$i(k) - mc(k) = 0$$

$\blacksquare$

De aldus geïsoleerde lineaire afhankelijkheidsrelaties (3.35) zijn evenwel niet altijd de enige afhankelijkheidsrelaties. We zullen dit illustreren aan de hand van volgende twee voorbeelden:

Voorbeeld 3.2.9. Beschouw het geïnterconnecteerde massa-veer-demper systeem uit Voorbeeld 3.1.6. De beperking (3.8) *impliceert* (door differentiatie) de extra beperking op de toestandsvariabelen

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 = 0 \tag{3.36}$$

We noemen (3.8) (en (3.9)) een *primaire* beperking, en (3.36) een *secundaire* beperking.

$\blacksquare$

Voorbeeld 3.2.10. Beschouw de overdrachtsfunctie $G(s) = \frac{1}{s^n}$, met toestandsrepresentatie (zie (2.68))

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x \tag{3.37}$$

Beschouw nu dit systeem onder de beperking $y = 0$, d.w.z.

$$\begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & & 0 \\ & & \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = 0, \tag{3.38}$$

als een systeem met toestandsvariabelen x en externe variabele u. Als afhankelijkheidsrelatie (3.34) krijgen we $x_1 = 0$. Echter differentiatie van $x_1 = 0$ gebruikmakend van (3.37) geeft $x_2 = \dot{x}_1 = 0$. Verder differentiëren levert $x_3 = \dot{x}_2 = 0$, enzovoort, tot en met $x_n = \dot{x}_{n-1} = 0$. Naast de *primaire* beperking $x_1 = 0$, verkrijgen we in dit geval dus de *secundaire* beperkingen $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$. $\blacksquare$

We zullen geen algemene methode behandelen om de oplossingen van een impliciet stelsel $K\dot{x} + Lx + Mw = 0$ te berekenen. In plaats daarvan zullen we, in analogie met Hoofdstuk 2.2, de oplossingen bekijken die met een complexe e-macht e^{st}, $s \in \mathbb{C}$, corresponderen. Beschouw een kandidaat paar oplossingen

$$\begin{array}{rcll} x(t) & = & x_0 e^{st}, & x_0 \in \mathbb{C}^n, \\ & & & \qquad s \in \mathbb{C} \\ w(t) & = & w_0 e^{st}, & w_0 \in \mathbb{C}^q, \end{array} \tag{3.39}$$

Invullen in $K\dot{x} + Lx + Mw = 0$ levert

$$0 = sKx_0e^{st} + Lx_0e^{st} + Mw_0e^{st} = ((sK + L)x_0 + Mw_0)e^{st}$$

We zien dus dat (3.39) een oplossing van $K\dot{x} + Lx + Mw = 0$ is indien s, x_0 en w_0 voldoen aan

$$(sK + L)x_0 + Mw_0 = 0 \tag{3.40}$$

Een frequentiedomeinanalyse van $K\dot{x} + Lx + Mw = 0$ bestaat derhalve uit het nagaan van de oplossingsverzameling x_0, w_0 van (3.40) voor iedere ("frequentie") $s \in \mathbb{C}$.

3.3 Samenvatting van Hoofdstuk 3

Een strikt modulaire definitie van systemen leidt tot het beschouwen van algemene systemen zonder vooraf opgelegde ingangs-uitgangstruktuur en met mogelijkerwijs afhankelijke toestandsvariabelen. De theorie van lineaire ingangs-toestands-uitgangssystemen, zoals behandeld in Hoofdstuk 2, kan veralgemeend worden tot algemene lineaire systemen met externe variabelen.

4

Regelbaarheid en waarneembaarheid

In dit hoofdstuk zullen we twee fundamentele begrippen uit de wiskundige systeemtheorie behandelen. Deze begrippen zijn belangrijk in de analyse van ieder systeem, en spelen een essentiële rol in het *regelen* van systemen enerzijds en het *schatten* van systeemvariabelen anderzijds. We zullen ons in dit hoofdstuk beperken tot lineaire tijdsinvariante ingangs-toestands-uitgangssystemen (in discrete zowel als in continue tijd), zoals behandeld in Hoofdstuk 2.

4.1 Regelbaarheid

Laten we eerst een ingangs-toestands-uitgangs-systeem in discrete tijd beschouwen, met weglating van de uitgangsvergelijking:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \; k \in \mathbb{Z} \quad x(k) \in \mathbb{R}^n, \; u(k) \in \mathbb{R}^m \tag{4.1}$$

De oplossing van (4.1) op tijdstip $k \geq 0$ voor $x(0) = x_0$ tengevolge van een ingangsrijtje $u(0), u(1), \cdots, u(k-1)$, ofwel

$$u : \{0, 1, \cdots, k-1\} \to \mathbb{R}^m,$$

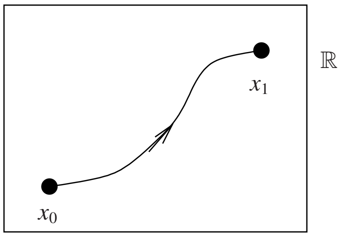
geven we aan met $x(k, x_0, u)$, en wordt volgens Hoofdstuk 2 gegeven door

$$\begin{aligned} x(k, x_0, u) &= A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j) \\ &= A^k x_0 + A^{k-1} Bu(0) + A^{k-2} Bu(1) + \cdots + Bu(k-1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Definitie 4.1.1. Het systeem (4.1) heet *regelbaar* (Engels: controllable) indien er voor elk tweetal punten x_0 en x_1 in de toestandsruimte $\mathbb{R}^n$ een $k_1 \in \mathbb{Z}, k_1 \geq 0$, bestaat en een ingangsrijtje $u : \{0, 1, \cdots, k_1 - 1\} \to \mathbb{R}^m$ zodanig dat

$$x(k_1, x_0, u) = x_1$$

■



Figuur 4.1: Regelbaarheid.

Een systeem is dus regelbaar indien we vanuit iedere willekeurige toestand x_0 ieder andere toestand x_1 kunnen bereiken door middel van een geschikt gekozen ingangssignaal, zie Figuur 4.1.

Cruciaal in de karakterisering van regelbaarheid zal de volgende $n \times nm$ matrix

$$R = \left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B \right] \tag{4.3}$$

blijken te zijn. R wordt de *regelbaarheidsmatrix* genoemd.
Veronderstel eerst $x_0 = 0$. De toestanden $x(k, 0, u)$ die we vanuit $x_0 = 0$ op tijdstip $k \geq 0$ kunnen bereiken zijn volgens (4.2) van de vorm

$$x(k, 0, u) = Bu(k-1) + ABu(k-2) + \cdots + A^{k-1}Bu(0) \tag{4.4}$$

met $u(0), u(1), \cdots, u(k-1)$ vrij te kiezen. Derhalve vormt de ruimte van alle mogelijke toestanden $x(k, 0, u)$ precies de lineaire ruimte opgespannen door de kolommen van de matrix $\left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{k-1}B \right]$, aangeduid als

$$\mathrm{Im} \left[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{k-1}B \right] \tag{4.5}$$

(Hier betekent Im M het *beeld* (image) van een matrix M.) Door k gelijk aan n te nemen concluderen we dat de verzameling van mogelijke toestanden $x(n, 0, u)$ precies gelijk is aan Im R. Dit leidt tot de volgende stelling.

Stelling 4.1.2. Zij rang $R = n$ (of, equivalent, Im $R = \mathbb{R}^n$). Dan is (4.1) regelbaar.

Bewijs. We hebben reeds boven aangetoond dat, indien $\mathrm{Im} R = \mathbb{R}^n$ de verzameling van bereikbare toestanden op tijdstip n vanuit $x_0 = 0$ gelijk is aan $\mathbb{R}^n$. Zij nu x_0 willekeurig. Zij x_1 een willekeurige andere toestand. Beschouw de toestand $x_1 - A^n x_0$. Wegens het eerste deel van het bewijs geldt dat we een ingangssignaal u kunnen vinden zodanig dat

$$x(n, 0, u) = Bu(n-1) + ABu(n-2) + \cdots + A^{n-1}Bu(0) = x_1 - A^n x_0 \tag{4.6}$$

of equivalent

$$x_1 = A^n x_0 + Bu(n-1) + ABu(n-2) + \cdots + A^{n-1}Bu(0),$$

en dus $x_1 = x(n, x_0, u)$. ■

De conditie rang $R = n$ is niet alleen *voldoende* voor regelbaarheid, maar ook *noodzakelijk*. Daartoe gebruiken we het volgende lemma

Lemma 4.1.3. *Voor alle $k \geq n$ is A^k een lineaire combinatie van $I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$.*

Bewijs. Dit volgt uit de zgn. stelling van *Cayley-Hamilton*: zij het karakteristieke polynoom van A gegeven door

$$\det(sI - A) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1 s + p_0, \tag{4.7}$$

dan geldt

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \cdots + p_1 A + p_0 I_n = 0 \tag{4.8}$$

Hieruit volgt

$$A^n = -p_{n-1}A^{n-1} - \cdots - p_1 A - p_0 I_n$$

en

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= -p_{n-1}A^n - \cdots - p_1 A^2 - p_0 A \\ &= -p_{n-1}(-p_{n-1}A^{n-1} - \cdots - p_1 A - p_0 I_n) - \cdots - p_1 A^2 - p_0 A \end{aligned}$$

Met inductie volgt dat A^k voor $k \geq n$ altijd te schrijven is als lineaire combinatie van $A^{n-1}, A^{n-2}, \cdots, A, I_n$, i.e., voor iedere $k \geq n$

$$A^k = t_{n-1}A^{n-1} + t_{n-2}A^{n-2} + \cdots + t_1 A + t_0 I_n$$

voor zekere constanten $t_{n-1}, t_{n-2}, \cdots, t_1, t_0$ (afhankelijk van k) ■

Gevolg 4.1.4. Voor iedere k geldt

$$\mathrm{Im} A^k B \subset \mathrm{Im} R$$

Bewijs. Dit is triviaal voor $k < n$, terwijl voor $k \geq n$ het volgt uit Lemma 4.1.3 ■

Gevolg 4.1.4 impliceert dat de conditie rang $R = n$ niet slechts een *voldoende* voorwaarde voor regelbaarheid is, zoals aangetoond in Stelling 4.1.2, maar tevens een *noozakelijke* voorwaarde daartoe is.

Stelling 4.1.5. Zij (4.1) regelbaar. Dan geldt: rang $R = n$

Bewijs. Stel rang $R < n$. Neem $x_0 = 0$. De toestanden bereikbaar vanuit 0 op een willekeurig tijdstip $k \geq 0$ zijn van de vorm

$$x(k, 0, u) = Bu(k-1) + ABu(k-1) + \cdots + A^{k-1}Bu(0)$$

en dus wegens Gevolg 4.1.4, $x(k, 0, u) \in \mathrm{Im} R$ voor iedere u. Maar omdat rang $R < n$ geldt $\mathrm{Im}\, R \neq \mathbb{R}^n$, en dus is (4.1) *niet* regelbaar. Tegenspraak. ∎

Voor ingangs-toestands-uitgangssystemen in *continue* tijd geldt verrassenderwijs hetzelfde resultaat. Beschouw de differentiaalvergelijkingen

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.9}$$

De oplossing van (4.9) op tijdstip $t \geq 0$ voor $x(0) = x_0$ tengevolge van een ingangssignaal $u : [0, t] \to \mathbb{R}^m$ geven we weer aan met $x(t, x_0, u)$. Uit de theorie van Hoofdstuk 2 volgt

$$x(t, x_0, u) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \tag{4.10}$$

Analoog aan Definitie 4.1.1 geven we

Definitie 4.1.6. Het systeem (4.9) heet *regelbaar* indien er voor elk tweetal punten x_0 en x_1 in $\mathbb{R}^n$ een $t_1 \geq 0$ en een ingangssignaal $u : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ bestaat zodanig dat

$$x(t_1, x_0, u) = x_1$$

∎

Stelling 4.1.7. Het systeem (4.9) is regelbaar $\Leftrightarrow$ rang $R = n$.

Bewijs. ($\Leftarrow$) Veronderstel rang $R = n$. Zij $t_1 > 0$ willekeurig. Definieer de $n \times n$ matrix

$$K = \int_0^{t_1} e^{-As}BB^Te^{-A^Ts}ds \tag{4.11}$$

We tonen aan dat K *inverteerbaar* is. Stel namelijk $Ka = 0$ voor een $a \in \mathbb{R}^n$. Dan ook $a^TKa = 0$, oftewel

$$0 = \int_0^{t_1} \left[a^Te^{-As}BB^Te^{-A^Ts}a\right]ds = \int_0^{t_1} \| a^Te^{-As}B \|^2 \, ds = 0 \tag{4.12}$$

met $\| a^Te^{-As}B \|$ de norm van $1 \times m$ rij-vector $a^Te^{-As}B$. Omdat $a^Te^{-As}B$ een continue functie van s is, is (4.12) equivalent met

$$a^Te^{-As}B = 0, \text{ voor alle } s \in [0, t_1] \tag{4.13}$$

Omdat de functie in (4.13) *constant* nul is op $[0, t_1]$, geldt ook dat alle afgeleiden *constant* nul zijn op $[0, t_1]$. Derhalve geeft $(n-1)$ keer differentiëren van (4.13) (gebruikmakend van $\frac{d}{ds}e^{-As} = -Ae^{-As}$)

$$\left.\begin{array}{c} a^T A e^{-As} B = 0 \\ a^T A^2 e^{-As} B = 0 \\ \vdots \\ a^T A^{n-1} e^{-As} B = 0 \end{array}\right. \quad s \in [0, t_1] \tag{4.14}$$

Invullen van $s = 0$ in (4.13) en (4.14), gebruikmakend van $e^{-A0} = I_n$, geeft dus

$$\begin{array}{c} a^T B = 0 \\ a^T A B = 0 \\ \vdots \\ a^T A^{n-1} B = 0 \end{array} \tag{4.15}$$

oftewel

$$a^T R = 0 \tag{4.16}$$

Omdat rang $R = n$ impliceert dit $a = 0$, en dus is K inverteerbaar.
Neem nu eerst $x_0 = 0$ en x_1 willekeurig. Definieer het ingangssignaal

$$u(s) = B^T e^{-A^T s} K^{-1} e^{-At_1} x_1, \quad s \in [0, t_1] \tag{4.17}$$

Volgens (4.10) geldt dan

$$\begin{aligned} x(t_1, 0, u) &= \textstyle\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B B^T e^{-A^T s} K^{-1} e^{-At_1} x_1 ds \\ &= e^{At_1} \left[\textstyle\int_0^{t_1} e^{-A_1 s} B B^T e^{-A^T s} ds \right] K^{-1} e^{-At_1} x_1 = \\ &= e^{At_1} K K^{-1} e^{-At_1} x_1 = e^{At_1} e^{-At_1} x_1 = x_1 \end{aligned} \tag{4.18}$$

waar bij de tweede gelijkheid gebruik werd gemaakt van de identiteit $= e^{A(t_1-s)} = e^{At_1} \cdot e^{-As}$. Tenslotte, zij x_0 en x_1 willekeurig. Beschouw dan de toestand $x_1 - e^{At_1} x_0$. Volgens het bovenstaande kunnen we een ingangssignaal $\bar{u} : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ construeren zodanig dat

$$x(t_1, 0, \bar{u}) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B \bar{u}(s) ds = x_1 - e^{At_1} x_0, \tag{4.19}$$

namelijk, zie (4.17),

$$\begin{aligned} \bar{u}(s) &= B^T e^{-A^T s} K^{-1} e^{-At_1} (x_1 - e^{At_1} x_0) \\ &= B^T e^{-A^T s} K^{-1} (e^{-At_1} x_1 - x_0), \quad s \in [0, t_1] \end{aligned} \tag{4.20}$$

Derhalve geldt

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}B\bar{u}(s)ds = x(t_1, x_0, \bar{u}).$$

($\Rightarrow$) Stel rang $R < n$. Neem $x_0 = 0$. De toestanden bereikbaar vanuit $x_0 = 0$ op een willekeurig tijdstip $t_1 \geq 0$ zijn van de vorm (zie (4.10) en de definitie van e^{At})

$$\begin{aligned} x(t,0,u) &= \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \\ &= \int_0^t \left[I + A(t-s) + \tfrac{1}{2!}A^2(t-s)^2 + \cdots\right] Bu(s)ds \\ &= B\int_0^t u(s)ds + AB\int_0^t (t-s)u(s)ds + A^2B\int_0^t \tfrac{(t-s)^2}{2!}u(s)ds + \\ &\quad \ldots \end{aligned} \tag{4.21}$$

Er geldt dus wegens Gevolg 4.1.4 dat $x(t, 0, u) \in \text{Im } R$. Derhalve leidt de veronderstelling rang $R < n$, of equivalent Im $R \neq \mathbb{R}^n$, tot de tegenspraak dat (4.9) *niet* regelbaar is. ∎

Opmerking Merk op dat $t_1 > 0$ willekeurig *klein* gekozen kan worden. Echter, voor t_1 klein zullen ook de elementen van K gedefinieerd door (4.11) klein worden, en dus K^{-1} groot. Dus zal ook het benodigde ingangssignaal u gedefinieerd door (4.17) of $\bar{u}$ gedefinieerd door (4.20) *groot* zijn.

Het ingangssignaal $\bar{u} : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ gedefinieerd door (4.20) is slechts één van de vele ingangssignalen die de toestand x_0 op tijdstip 0 in de toestand x_1 op tijdstip t_1 overvoert. In zo'n geval is het interessant om een *optimaal* ingangssignaal te bepalen dat x_0 in x_1 overvoert; waarbij "optimaal" wordt verstaan t.o.v. een (zinnig) kostencriterium. Het blijkt dat het ingangssignaal $\bar{u}$ gedefinieerd door (4.20) *optimaal* is in de volgende zin.

Propositie 4.1.8. Beschouw het ingangssignaal $\bar{u} : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ gedefinieerd door (4.20). Laat $u : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ een willekeurig ander ingangssignaal zodanig dat $x(t_1, 0, u) = x_1$. Dan geldt

$$\int_0^{t_1} u^T(s)u(s)ds \geq \int_0^{t_1} \bar{u}^T(s)\bar{u}(s)ds \tag{4.22}$$

Bewijs. Bij constructie van $\bar{u}$ geldt

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}B\bar{u}(s)ds \tag{4.23}$$

Zij nu $u : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ een willekeurig ander ingangssignaal zodanig dat $x_1 = x(t_1, x_0, u)$, d.w.z.

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}Bu(s)ds \tag{4.24}$$

Door (4.24) van (4.23) af te trekken, verkrijgen we $\int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}B[u(s)-\bar{u}(s)]ds = 0$, ofwel, omdat e^{At_1} inverteerbaar is,

$$\int_0^{t_1} e^{-As}B[u(s)-\bar{u}(s)]ds = 0 \tag{4.25}$$

Voorvermenigvuldiging van (4.25) met $(e^{-At_1}x_1 - x_0)^T K^{-1}$ geeft dus (zie (4.20))

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{t_1} \left[(e^{-At_1}x_1 - x_0)^T K^{-1} e^{-As}B\right][u(s)-\bar{u}(s)]ds \\ &= \int_0^{t_1} \bar{u}^T(s)[u(s)-\bar{u}(s)]ds \end{aligned} \tag{4.26}$$

Derhalve geldt

$$\int_0^{t_1} \left[u^T(s)u(s) - \bar{u}^T(s)\bar{u}(s)\right]ds = \int_0^{t_1} [u(s)-\bar{u}(s)]^T [u(s)-\bar{u}(s)]\,ds \geq 0 \tag{4.27}$$

waaruit (4.22) volgt. ■

Opmerking De uitdrukking $\int_0^{t_1} u^T(s)u(s)ds$ wordt wel de *energie* van het ingangssignaal u op $[0,t_1]$ genoemd; uit Propositie 4.1.8 volgt dus dat $\bar{u}$ gedefinieerd door (4.20) het ingangssignaal met de *kleinste energie* is dat x_0 in x_1 overvoert.

In het geval $m = 1$ (scalaire ingang $u \in \mathbb{R}$), is de ingangsmatrix B in (4.9) een $n \times 1$ vector, en dus R een $n \times n$ matrix. In dit geval kunnen we Stelling 4.1.7 als volgt formuleren:

Gevolg 4.1.9. Beschouw (4.9) voor $m = 1$. Dan geldt: (4.9) is regelbaar $\Leftrightarrow$ det $R \neq 0$.

Voorbeeld 4.1.10 (de jongleur). Beschouw een *omgekeerde* (d.w.z. staande) ideale slinger bestaande uit een massa m_1 bevestigd aan een stijve massaloze staaf met lengte ℓ_1, welke vrij in het steunpunt S kan draaien. Veronderstel dat we de positie van S horizontaal in één richting kunnen verplaatsen; dit is de ingangsgrootheid u. De uitwijking van de slinger t.o.v. de vertikale stand is de hoek φ_1. De tweede wet van Newton geeft

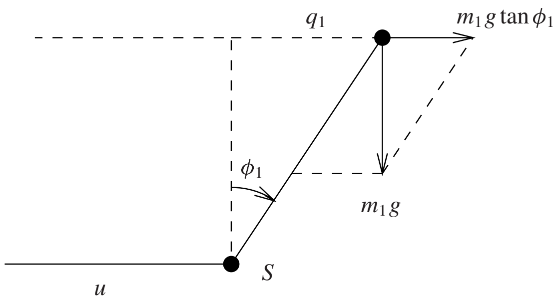
$$m_1\frac{d^2q_1}{dt^2} = m_1\frac{d^2}{dt^2}(u + \ell_1 \sin\varphi_1) = m_1 g \tan\varphi_1 \tag{4.28}$$

met q_1 de horizontale uitwijking van de massa m_1. Indien we het systeem lineariseren om $\varphi_1 = 0,\ u = 0$, dan vervangen we $\sin\varphi_1$ en $\tan\varphi_1$ beiden door φ_1, en krijgen we

$$\ddot{u} + \ell_1\ddot{\varphi}_1 - g\varphi_1 = 0 \tag{4.29}$$

Kies als toestandsvariabelen $q_1 = u + \ell_1\varphi_1$ en $v_1 = \dot{q}_1 = \dot{u} + \ell_1\dot{\varphi}_1$, dan schrijven we (4.29) in toestandsvorm als

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell_1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g}{\ell_1} \end{bmatrix} u \tag{4.30}$$

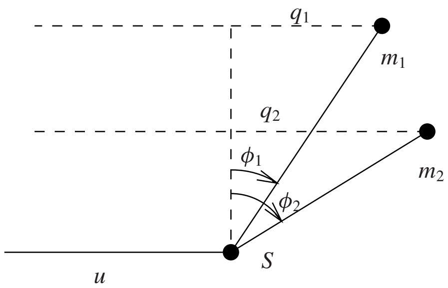


Figuur 4.2: Omgekeerde slinger.

De regelbaarheidsmatrix R wordt nu gegeven door

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{g}{\ell_1} \\ -\frac{g}{\ell_1} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Omdat det $R = g^2/\ell_1^2 \neq 0$, is (4.30) regelbaar. In de buurt van de verticale stand kunnen we dus zowel de *positie* als de *snelheid* van de slinger regelen door het steunpunt S te verplaatsen.
Neem nu aan dat onze jongleur *twee* omgekeerde ideale slingers op zijn hand heeft, zie Figuur 4.3. Als boven verkrijgen we de gelineariseerde vergelijkingen



Figuur 4.3: Twee omgekeerde slingers.

$$\begin{aligned} &\ell_1\ddot{\varphi}_1 - g\varphi_1 + \ddot{u} = 0, \quad q_1 = u + \ell_1\varphi_1 \\ &\ell_2\ddot{\varphi}_2 - g\varphi_2 + \ddot{u} = 0, \quad q_2 = u + \ell_2\varphi_2 \end{aligned} \tag{4.32}$$

met toestandsrepresentatie

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{\ell_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{\ell_1} \\ -\frac{g}{\ell_2} \end{bmatrix} u \tag{4.33}$$

Definieer $\alpha := -\frac{g}{\ell_1}$, $\beta := -\frac{g}{\ell_2}$. Dan is de regelbaarheidsmatrix

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & \beta & 0 & -\beta^2 \\ \alpha & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ \beta & 0 & -\beta^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

R heeft rang 4 dan en slechts dan als de matrix $\left[\begin{smallmatrix} \alpha & -\alpha^2 \\ \beta & -\beta^2 \end{smallmatrix}\right]$ rang 2 heeft, of, equivalent, $\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta \neq 0$, ofwel $\alpha \neq \beta$. Het systeem is dus regelbaar indien $\ell_1 \neq \ell_2$ en niet regelbaar indien $\ell_1 = \ell_2$. ∎

Voorbeeld 4.1.11. Beschouw de toestandsrepresentatie van een overdrachtsfunctie $g(s) = \frac{q_0+q_1s+\cdots+q_{n-1}s^{n-1}}{p_0+p_1s+\cdots+p_{n-1}s^{n-1}+s^n}$ gegeven door (zie (2.75))

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} q_0 \cdots q_{n-1} \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{4.35}$$

De regelbaarheidsmatrix R heeft de vorm

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & * \\ 0 & 1 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

met $*$ niet nader gespecificeerde elementen. Het is duidelijk dat rang $R = n$, en dus is (4.35) *regelbaar*. ∎

De uitbreiding van Definitie 4.1.6 naar toestandssystemen met externe variabelen

$$K\dot{x} + Lx + Mw = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ w \in \mathbb{R}^q \tag{4.36}$$

is niet meteen duidelijk. (Evenzo de uitbreiding van Definitie 4.1.1 naar discrete tijd systemen $Kx(k+1) - Lx(k) + Mx(k) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$.) Daar er in het algemeen statische vergelijkingen $Sx = 0$ in (4.36) voorkomen, kunnen we niet meer eisen dat voor *ieder* paar toestanden x_0 en x_1 in $\mathbb{R}^n$ er een toestandstraject dient te bestaan dat x_0 en x_1 aan elkaar verbindt. Verder is een probleem dat we niet meteen weten welke componenten van de w-vector als vrije ingangsvariabelen kunnen worden beschouwd.
In eerste instantie zullen we regelbaarheid voor systemen (4.36) als volgt definiëren. Bepaal alle (primaire *en* secundaire, zie Voorbeeld 3.2.10) statische vergelijkingen in x volgend uit (4.36). Dit definieert een lineaire deelruimte

$$S \subset \mathbb{R}^n \tag{4.37}$$

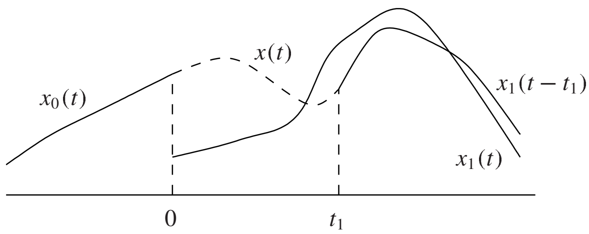
Het systeem (4.36) heet nu *regelbaar* indien voor elk tweetal toestanden $x_0, x_1 \in S$ er een $t_1 > 0$ en een *oplossing* $(x(t), w(t)), t \in [0, t_1]$, van (4.36) bestaat met $x(0) = x_0$ en $x(t_1) = x_1$.
Merk op dat de deelruimte S precies *die* toestanden $x \in \mathbb{R}^n$ zijn waarvoor er een oplossing $(x(t), w(t)), t \in \mathbb{R}$, van (4.36) bestaat met $x(0) = x$. Derhalve, gebruikmakend van tijdsinvariantie, kunnen we de bovenstaande voorlopige definitie van regelbaarheid intrinsieker herformuleren als volgt.

Definitie 4.1.12. Het toestandssysteem met externe variabelen (4.36) is *regelbaar* indien voor elk tweetal oplossingen $(x_0(t), w_0(t)), t \in \mathbb{R}$, en $(x_1(t), w_1(t)), t \in \mathbb{R}$, van (4.36) er een tijdstip $t_1 \geq 0$ en een oplossing $(x(t), w(t)), t \in \mathbb{R}$, van (4.36) bestaat zodanig dat

$$\begin{array}{rcll} x(t) & = & x_0(t), & \multirow{2}{*}{$t < 0$} \\ w(t) & = & w_0(t), & \\ \\ x(t) & = & x_1(t - t_1), & \multirow{2}{*}{$t \geq t_1$} \\ w(t) & = & w_1(t - t_1), & \end{array} \tag{4.38}$$

■

Eigenschap (4.38) geeft aan dat de oplossing $(x_0(t), w_0(t))$ geconcateneerd kan worden aan de *verschoven* oplossing $(x_1(t - t_1), w_1(t - t_1))$, middels een "tussenstukoplossing" op het interval $[0, t_1)$, zie Figuur 4.4.



Figuur 4.4: Regelbaarheid.

Opmerking Een constructieve test voor regelbaarheid van (4.36) is beschreven in Opgave 4.1.

4.2 Waarneembaarheid

De tweede fundamentele eigenschap van systemen die we hier behandelen is de notie van *"waarneembaarheid"*. We beschouwen weer eerst lineaire tijdsinvariante ingangs-toestands-uitgangssystemen in discrete tijd

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & Ax(k) + Bu(k), \quad u(k) \in \mathbb{R}^m, \ x(k) \in \mathbb{R}^n \\ \\ y(k) & = & Cx(k) \end{array} \tag{4.39}$$

Definitie 4.2.1. Het systeem (4.39) is *waarneembaar* indien er een $k_1 \geq 0$ bestaat zodanig dat voor elk tweetal oplossingen $(u_1(k), x_1(k), y_1(k))$, $(u_2(k), x_2(k), y_2(k))$, $k \in \mathbb{Z}$, van (4.39) met

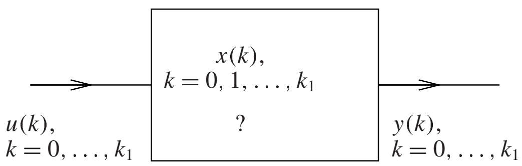
$$\begin{aligned} u_1(k) &= u_2(k) \\ y_1(k) &= y_2(k) \end{aligned} \qquad k = 0, 1, \cdots, k_1$$

noodzakelijkerwijs geldt

$$x_1(k) = x_2(k) \quad k = 0, 1, \cdots, k_1.$$

■

Het systeem (4.39) is dus waarneembaar indien we op grond van de kennis van het ingangs- en uitgangssignaal op een bepaald interval $[0, k_1]$ éénduidig het toestandssignaal op het interval $[0, k_1]$ kunnen bepalen, zie Figuur 4.5. In een waarneembaar systeem kunnen we derhalve de evolutie van de (inwendige) toestandsvariabelen éénduidig bepalen op basis van de uitwendige (ingangs- en uitgangs-)variabelen, zonder de toestandsvariabelen direct te meten.



Figuur 4.5: Waarneembaarheid.

Cruciaal in de karakterisering van waarneembaarheid is de volgende $np \times n$ matrix (vergelijk met de definitie van R in (4.3))

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

W wordt de *waarneembaarheidsmatrix* genoemd.

Stelling 4.2.2. Het systeem (4.39) is waarneembaar $\Leftrightarrow$ rang $W = n$.

Bewijs. ($\Leftarrow$) Zij rang $W = n$. Neem $k_1 = n - 1$, en zij

$$\begin{aligned} u_1(k) &= u_2(k) = u(k), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \\ y_1(k) &= y_2(k), \qquad\qquad k = 0, 1, \cdots, n-1 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Uit (4.2) volgt dat de tweede regel van (4.41) impliceert

$$CA^k x_1(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} Bu(j) + Du(k) =$$

$$CA^k x_2(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} Bu(j) + Du(k), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

en dus

$$CA^k[x_1(0) - x_2(0)] = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{4.42}$$

Echter, (4.42) is niets anders dan

$$W[x_1(0) - x_2(0)] = 0 \tag{4.43}$$

en dus, daar rang $W = n$, $x_1(0) = x_2(0)$. Omdat $u_1(k) = u_2(k)$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, geldt dan ook $x_1(k) = x_2(k)$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

($\Rightarrow$) Zij rang $W < n$. Neem nu x_1^0 en x_2^0 verschillend zodanig dat

$$W\left[x_1^0 - x_2^0\right] = 0 \tag{4.44}$$

oftewel $CA^k(x_1^0 - x_2^0) = 0$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Wegens Lemma 4.1.3 geldt dan ook

$$CA^k x_1^0 = CA^k x_2^0, \quad \forall k \geq 0 \tag{4.45}$$

Neem nu $u(k), k \geq 0$, willekeurig, en vergelijk de oplossing $x_1(k)$ van
$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ horend bij $x_1(0) = x_1^0$, met de oplossing $x_2(k)$ horend bij $x_2(0) = x_2^0$. De bijbehorende uitgangssignalen $y_1(k)$ en $y_2(k)$ worden gegeven door

$$CA^k x_1^0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} Bu(j) + Du(k), \quad k \geq 0$$

respectievelijk

$$CA^k x_2^0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} Bu(j) + Du(k), \quad k \geq 0$$

en zijn derhalve wegens (4.45) aan elkaar gelijk. Omdat echter de toestandstrajectoriën $x_1(k)$ en $x_2(k)$ duidelijk *verschillend* zijn is dit een tegenspraak met waarneembaarheid.

■

Opmerking Zoals uit het bewijs van Stelling 4.2.2 blijkt, reduceert het probleem van het eenduidig bepalen van $x(k)$, $k = 0, 1, \cdots, k_1$, tot het eenduidig bepalen van de begintoestand $x(0)$. Dit suggereert een alternatieve notie van waarneembaarheid: het systeem

(4.39) wordt *onderscheidbaar* genoemd indien er een $k_1 \geq 0$ bestaat zodanig dat voor elk tweetal toestanden $x_1^0, x_2^0 \in \mathbb{R}^n$ er een ingangssignaal $u : [0, k_1] \to \mathbb{R}^m$ bestaat zodanig dat de uitgangssignalen $y_1, y_2 : [0, k_1] \to \mathbb{R}^p$ resulterend uit dit ingangssignaal en de begintoestand $x_1(0) = x_1^0$, respectievelijk $x_2(0) = x_2^0$, *verschillend* zijn. Er kan direkt worden aangetoond dat

$$\text{waarneembaar} \Rightarrow \text{onderscheidbaar},$$

terwijl voor lineaire tijdsinvariante systemen geldt (zie Opgave 4.2)

$$\text{onderscheidbaar} \Rightarrow \text{waarneembaar}.$$

■

De behandeling van waarneembaarheid voor lineaire tijdsinvariante ingangs–toestands-uitgangssystemen in *continue tijd*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{4.46}$$

verloopt geheel analoog als volgt.

Definitie 4.2.3. Het systeem (4.46) heet *waarneembaar* indien er een $t_1 \geq 0$ bestaat zodanig dat voor elk tweetal oplossingen $(u_1(t), x_1(t), y_1(t)), (u_2(t), x_2(t), y_2(t)), t \in \mathbb{R}$, van (4.46) met

$$\left.\begin{aligned} u_1(t) &= u_2(t) \\ y_1(t) &= y_2(t) \end{aligned}\right., t \in [0, t_1]$$

noodzakelijkerwijs geldt

$$x_1(t) = x_2(t), \quad t \in [0, t_1]$$

■

Stelling 4.2.4. Het systeem (4.46) is waarneembaar $\Leftrightarrow$ rang $W = n$.

Bewijs. ($\Leftarrow$) Zij $t_1 > 0$ willekeurig. Zij $u_1(t) = u_2(t) = u(t),\ t \in [0, t_1]$, en $y_1(t) = y_2(t),\ t \in [0, t_1]$. Uit Hoofdstuk 2 volgt (zie (2.39))

$$Ce^{At}x_1(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds + Du(t) =$$

$$Ce^{At}x_2(0) + \int_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds + Du(t)$$

voor $t \in [0, t_1]$, en dus

$$Ce^{At}[x_1(0) - x_2(0)] = 0, \quad t \in [0, t_1] \tag{4.47}$$

Invullen van $t = 0$ in (4.47) levert $C[x_1(0) - x_2(0)] = 0$. Echter, omdat de functie in (4.47) *identiek* nul is op $[0, t_1]$ zijn ook alle afgeleiden (naar t) identiek nul: Differentieer (4.47) $(n-1)$ keer; dit levert $\left(\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}\right)$

$$\begin{aligned} Ce^{At}[x_1(0) - x_2(0)] &= 0 \\ CAe^{At}[x_1(0) - x_2(0)] &= 0 \\ &\vdots \\ CA^{n-1}e^{At}[x_1(0) - x_2(0)] &= 0 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Invullen van $t = 0$ in (4.48) levert dan

$$\begin{aligned} C[x_1(0) - x_2(0)] &= 0 \\ CA[x_1(0) - x_2(0)] &= 0 \\ &\vdots \\ CA^{n-1}[x_1(0) - x_2(0)] &= 0 \end{aligned} \tag{4.49}$$

oftewel, $W[x_1(0) - x_2(0)] = 0$. Omdat rang $W = n$ impliceert dit $x_1(0) = x_2(0)$, en dus, omdat $u_1(t) = u_2(t),\ t \in [0, t_1], x_1(t) = x_2(t), t \in [0, t_1]$.
($\Rightarrow$) Zij rang $W < n$. Neem x_1^0 en x_2^0 verschillend zodanig dat $W[x_1^0 - x_2^0] = 0$. Dan geldt $CA^k(x_1^0 - x_2^0) = 0,\ k = 0, 1, \cdots, n-1$, en wegens Lemma 4.1.3

$$CA^k x_1^0 = CA^k x_2^0, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{4.50}$$

Dit impliceert, wegens de definitie van e^{At}, dat

$$Ce^{At}x_1^0 = Ce^{At}x_2^0,\ t \geq 0 \tag{4.51}$$

Neem nu $u(t), t \geq 0$, willekeurig. Dan zijn de uitgangssignalen $y_1(t), y_2(t), t \geq 0$, resulterend uit $u(t), t \geq 0$, en begintoestand $x_1(0) = x_1^0$, respectievelijk $x_2(0) = x_2^0$, *gelijk*, terwijl de toestandstrajectoriën $x_1(t), x_2(t), t \geq 0$, *verschillend* zijn. Dit levert een tegenspraak met waarneembaarheid. ■

Opmerking Uit het bewijs volgt dat we $t_1 > 0$ *willekeurig klein* mogen nemen.

In het geval $p = 1$ (scalaire uitgang $y \in \mathbb{R}$), is C een $1 \times n$ vector, en dus W een $n \times n$ matrix. Analoog aan Gevolg 4.1.9 verkrijgen we dus

Gevolg 4.2.5. Beschouw (4.39) en (4.46) voor $p = 1$. Dan geldt: (4.39) en (4.46) is waarneembaar $\Leftrightarrow$ det $W \neq 0$.

Voorbeeld 4.2.6. Beschouw het systeem met twee omgekeerde slingers in Voorbeeld 4.1.10. Indien we slechts één van de beide hoeken φ_1 of φ_2 waarnemen is het systeem niet waarneembaar. Neem bijvoorbeeld

$$y = \varphi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{\ell_1} u \tag{4.52}$$

Dan is

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\ell_1} & 0 \\ \frac{g}{\ell_1^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{\ell_1^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.53}$$

en dus rang $W = 2 < 4$. Neem nu echter als uitgang y het *verschil* van beide hoeken, d.w.z.

$$y = \varphi_1 - \varphi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} & \frac{-1}{\ell_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_2} - \frac{1}{\ell_1} \end{bmatrix} u \tag{4.54}$$

Dan is

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell_1} & \frac{-1}{\ell_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\ell_1} & \frac{-1}{\ell_2} \\ \frac{g}{\ell_1^2} & \frac{-g}{\ell_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g}{\ell_1^2} & \frac{-g}{\ell_2^2} \end{bmatrix} \tag{4.55}$$

en we gaan na: rang $W = 4 \Leftrightarrow \ell_1 \neq \ell_2$. Derhalve kunnen we in het geval $\ell_1 \neq \ell_2$, op basis van het ingangssignaal $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, en als uitgangssignaal $y(t)$, $t \in [0, t_1]$, het verschil van beide hoeken, de 4-dimensionale toestand $x(t) = (q_1(t), q_2(t), v_1(t), v_2(t))^T$, $t \in [0, t_1]$, éénduidig bepalen. ∎

De gegeven definitie van waarneembaarheid laat zich direkt veralgemenen tot lineaire tijdsinvariante toestandssystemen met externe variabelen zoals behandeld in Hoofdstuk 3. Voor de beknoptheid zullen we alleen het *continue tijd* geval

$$K\dot{x} + Lx + Mw = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ w \in \mathbb{R}^q \tag{4.56}$$

behandelen.

Definitie 4.2.7. Het systeem (4.56) is *waarneembaar* indien er een $t_1 \geq 0$ bestaat zodanig dat voor elk tweetal oplossingen $(x_1(t), w_1(t))$, $(x_2(t), w_2(t))$ $t \in \mathbb{R}$, van (4.56) met

$$w_1(t) = w_2(t), \quad t \in [0, t_1]$$

noodzakelijkerwijs geldt

$$x_1(t) = x_2(t), \quad t \in [0, t_1]$$

Stelling 4.2.8. Het systeem (4.56) is waarneembaar $\Leftrightarrow$ er bestaat een $t_1 \geq 0$ zodat de *enige* oplossing $x(t)$ van het stelsel $K\dot{x} + Lx = 0$ op het tijdsinterval $[0, t_1]$ de nul-oplossing $x(t) = 0,\ t \in [0, t_1]$, is.

Bewijs. ($\Leftarrow$) Zij $(x_1(t), w_1(t)),\ (x_2(t), w_2(t)),\ t \in \mathbb{R}$, oplossingen van (4.56) met $w_1(t) = w_2(t),\ t \in [0, t_1]$. Wegens lineariteit is dan ook $(x_1(t) - x_2(t), w_1(t) - w_2(t)),\ t \in \mathbb{R}$, een oplossing van (4.56). Definieer $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$. Omdat $w_1(t) = w_2(t),\ t \in [0, t_1]$, geldt dan dat $x(t)$ een oplossing is van $K\dot{x} + Lx = 0$, op het tijdsinterval $[0, t_1]$. Derhalve geldt $x(t) = 0,\ t \in [0, t_1]$, en dus $x_1(t) = x_2(t),\ t \in [0, t_1]$.
($\Rightarrow$) Neem t_1 zoals in Definitie 4.2.7. Zij $x_1(t),\ t \in [0, t_1]$ een oplossing van $K\dot{x} + Lx = 0$. Definieer $x_2(t) = 0$, en $w_1(t) = w_2(t) = 0,\ t \in [0, t_1]$. Dan zijn $(x_1(t), w_1(t)),\ (x_2(t), w_2(t))$ twee oplossingen van (4.56) met $w_1(t) = w_2(t),\ t \in [0, t_1]$. Dus geldt $x_1(t) = x_2(t) = 0,\ \in [0, t_1]$. ∎

We zullen hier verder geen expliciete voorwaarden op K en L formuleren zodanig dat het stelsel $K\dot{x} + Lx = 0$ slechts de nul-oplossing $x(t) \equiv 0$ heeft. Merk wel op dat Stelling 4.2.8 ook een nieuw licht werpt op de condities verkregen in Stelling 4.2.4 voor waarneembaarheid van ingangs-toestands-uitgangssystemen, zie Opgave 4.3.

Voorbeeld 4.2.9. Beschouw het geïnterconnecteerde systeem in Voorbeeld 3.1.6, met $c = 0$ in (3.8).

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{q}_1 &= -k_1q_1 - r\dot{q}_1 + F_1 \\
m_2\ddot{q}_2 &= -k_2(q_2 - q_3) + F_2 \\
m_3\ddot{q}_3 &= -k_2(q_3 - q_2) + F_3 \\
q_1 &+ q_2 = 0 \\
F_1 &= F_2
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Neem als externe variabelen w de krachten F_1, F_3, en als toestandsvariabelen x de vector $(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, F_2)$. Uit Stelling 4.2.8 is min of meer intuïtief duidelijk dat het systeem waarneembaar is voor $r > 0$. (Stel u bijvoorbeeld een dun kussentje voor tussen massa m_1 en m_2. De laatste twee vergelijkingen van (4.57) plus $F_1 = 0$ impliceren dat de twee massa's tegen elkaar aan blijven *zonder* het kussentje in te drukken, terwijl $F_3 = 0$.) Wiskundig gezien kunnen we het stelsel

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{q}_1 &= -k_1q_1 - r\dot{q}_1 \\
m_2\ddot{q}_2 &= -k_2(q_2 - q_3) \\
m_3\ddot{q}_3 &= -k_2(q_3 - q_2)
\end{aligned}$$

splitsen in een differentiaalvergelijking $m_1\ddot{q}_1 = -k_1 q_1 - r\dot{q}_1$ die wegens $r > 0$ exponentieel *afnemende* oplossingen heeft (zie Hoofdstuk 2.1), en een stelsel

$$\begin{aligned} m_2\ddot{q}_2 &= -k_2(q_2 - q_3) \\ m_3\ddot{q}_3 &= -k_2(q_3 - q_2) \end{aligned}$$

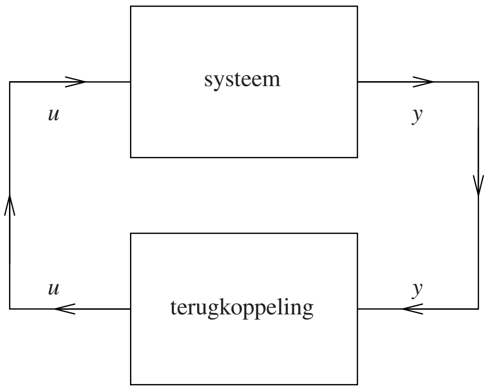
dat periodieke oplossingen heeft (behorend bij *imaginaire* eigenwaarden). Dit is in strijd met de algebraische relatie $q_1(t) + q_2(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}$. ∎

4.3 Regelen

4.3.1 Open-lus besturing en terugkoppeling

In de definitie van regelbaarheid onderzochten we het bestaan van ingangssignalen $u : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, die ervoor zorgen dat een gegeven systeem vanuit een willekeurige, doch vaste, begintoestand $x(0) = x_0$ op tijdstip t_1 naar een *gewenste* toestand x_1 wordt gestuurd. Dit is een typisch voorbeeld van *open-lus* (Engels: open-loop) *besturing*: op basis van de systeemgegevens en x_0, x_1 wordt een tijdssignaal $u : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ geprogrammeerd. Indien echter een zo berekend ingangssignaal op een reëel systeem wordt toegepast, dan zal bijna altijd het eindresultaat in meer of mindere mate afwijken van het berekende (en beoogde!) resultaat. Dit is te wijten aan onontkoombare onnauwkeurigheden in het model, storende invloeden op het systeem, en een niet 100% nauwkeurige implementatie van het berekende ingangssignaal. Hoewel open-loop besturing nuttig is zal het daarom in de praktijk altijd moeten worden aangevuld met andere methoden.
Wat zijn andere methoden voor besturing? Laten we Voorbeeld 4.1.10 nog eens bekijken. We kunnen ons hierbij een jongleur voorstellen met een stok op zijn hand die hij horizontaal kan verplaatsen. Stel dat de jongleur de stok wil balanceren; met andere woorden, hij wil de stok voortdurend (bij benadering) rechtop houden. Hoe zal hij dan handelen? In principe zou hij op een gegeven ogenblik de positie en de snelheid van de stok kunnen bepalen en op grond daarvan (en een precieze kennis van de bewegingsvergelijkingen van de stok) de beweging kunnen uitrekenen die hij met zijn hand moet uitvoeren om de stok rechtop te zetten en te houden. Dan kan hij (eventueel met zijn ogen dicht) deze handbeweging uitvoeren. Zelfs al zou onze jongleur tot deze berekening in staat zijn, dan nog is het duidelijk dat hij op deze wijze de stok niet in evenwicht zal houden. Immers, er zullen altijd kleine fouten of storingen optreden, en daar de positie van de stok rechtop een instabiele situatie is zullen deze er voor zorgen dat de stok toch naar beneden valt!
De methode die hij dan ook zal gebruiken is een geheel andere. Hij neemt op *ieder* moment de plaats en de snelheid van het uiteinde van de stok waar en past *op basis hiervan* op ieder moment de beweging van zijn hand aan. Deze voor de hand liggende methode is de essentie van de *regeltheorie*: de ingang $u(t)$ op ieder tijdstip t wordt bepaald als *functie* van de waargenomen grootheden van het systeem tot op dit tijdstip t. (In het geval van de jongleur hangt bijvoorbeeld de plaats van de hand op ieder tijdstip af van de positie en snelheid van het uiteinde van de stok op dit tijdstip). Dit principe wordt

terugkoppeling (Engels: feedback) genoemd, en de resulterende besturing gesloten-lus (Engels: closed-loop) besturing, zie Figuur 4.6. In feite is er in ons jongleursvoorbeeld,



Figuur 4.6: Terugkoppeling.

en in vele andere voorbeelden, nog meer aan de hand. In de bepaling van de benodigde terugkoppeling zit een *lerend*, of *adaptief* element: op basis van het resultaat van de terugkoppeling, zullen we de terugkoppeling eventueel bijstellen. Zo zal de functie waarmee we de beweging van de hand laten afhangen van de positie en de snelheid van het uiteinde van de stok eventueel worden bijgesteld; i.h.b. als de eigenschappen van het te regelen systeem veranderen (bijvoorbeeld doordat er een voorwerp bovenop de stok wordt toegevoegd!)

Dit terugkoppelingsmechanisme (adapterend of niet) kan in veel biologische, fysische en technische systemen worden onderscheiden. In de regeltechniek is de regelaar meestal zelf een automatisch mechanisme (in tegenstelling tot onze jongleur). Eén van de klassieke voorbeelden van een mechanische regelaar is afkomstig van James Watt, en betreft de regeling van de stoommachine, de "motor" achter de industriële revolutie van de vorige eeuw. De stoommachine kan als een ingangs-toestands-uitgangssysteem worden beschouwd met als ingang u de stoomtoevoer en als uitgang y de hoeksnelheid van de aandrijfas. Een typisch probleem is om de uitgang y zoveel mogelijk in de buurt van een gewenste constante waarde y_0 (een constant toerental) te laten verkeren. De door James Watt ontwikkelde centrifugaalregulateur bereikt dit door twee om de aandrijfas ronddraaiende gewichten een hendel te laten bedienen die de stoomtoevoer regelt. Indien het toerental hoger wordt gaan de gewichten omhoog en wordt daarmee automatisch de stoomtoevoer (en daarmee indirect het toerental) verminderd. Andersom zullen bij een lager wordend toerental de gewichten omlaag gaan waardoor de stoomtoevoer wordt verhoogd. Door deze centrifugaalregulateur aan de stoommachine toe te voegen vindt er dus een directe terugkoppeling plaats van de uitgang y naar de ingang u, en er kan wiskundig aangetoond worden dat de uitgang y naar de gewenste waarde y_0 convergeert.

4.3.2 Toestandsterugkoppeling

In het geval van Watt's centrifugaalregulateur is het alleen nodig om de uitgang y terug te koppelen. In andere voorbeelden is het echter noodzakelijk om de gehele toestandsvector terug te koppelen.

Voorbeeld 4.3.1. Beschouw de ingangs-toestands-uitgangsrepresentatie van een overdrachtsfunctie $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_{n-1}s^{n-1}+\cdots+q_1 s+q_0}{s^n+p_{n-1}s^{n-1}+\cdots+p_1 s+p_0}$ gegeven in (2.75):

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
y &= \begin{bmatrix} q_0 & \cdots & q_{n-1} \end{bmatrix} x
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

De eigenwaarden van de A-matrix zijn gelijk aan de nulpunten van het polynoom $p(s)$, zie Opgave 2.4. Stel dat het regeldoel is om m.b.v. terugkoppeling het systeem asymptotisch stabiel om de oorsprong $x = 0$ te maken. I.h.a. is dit niet mogelijk d.m.v. lineaire *uitgangs*terugkoppeling $u = ky$, zie Opgave 4.7. Beschouw nu een lineaire *toestands*terugkoppeling

$$
u = f_0 x_1 + f_1 x_2 + \cdots f_{n-1} x_n, \qquad f_i \in \mathbb{R}. \tag{4.59}
$$

Invullen van (4.59) in (4.58) geeft

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -p_0 & & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (f_0 x_1 + \cdots + f_{n-1} x_n) \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ f_0 - p_0 & f_1 - p_1 & \cdots & f_{n-1} - p_{n-1} \end{bmatrix}}_{A_{cl}} x
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

De eigenwaarden van de gesloten-lus A-matrix $A_{c\ell}$ zijn gelijk aan de nulpunten van het polynoom

$$
(p_0 - f_0) + (p_1 - f_1)s + \cdots + (p_{n-1} - f_{n-1})s^{n-1} + s^n. \tag{4.61}
$$

Door een geschikte keuze van de terugkoppelparameters $f_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$, zijn de coëfficiënten, en dus ook de *nulpunten*, van het polynoom (4.61) naar believen in te stellen. We concluderen derhalve dat d.m.v. toestandsterugkoppeling (4.59) de eigenwaarden van het teruggekoppelde systeem naar believen zijn in te stellen. In het bijzonder zijn de eigenwaarden in de linkerhelft van het complexe vlak te plaatsen (daarmee asymptotische stabiliteit bereikend). ■

Het is eenvoudig na te gaan dat (4.58) een *regelbaar* systeem is. Andersom kunnen we laten zien dat *ieder* regelbaar systeem

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + bu, \quad u \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}^n \\ y &= cz, \qquad\qquad y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.62}$$

met scalaire ingang en uitgang d.m.v. een lineaire toestandstransformatie $x = Tz$ te transformeren is tot het systeem (4.58), voor zekere $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$, en $q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}$. Dit zal leiden tot de volgende belangrijke conclusie: voor *ieder regelbaar systeem* (4.62) *met scalaire ingang zijn de eigenwaarden van het teruggekoppelde systeem naar believen in te stellen* d.mv. toestandsterugkoppeling (4.59) (In het bijzonder kunnen de eigenwaarden van het teruggekoppelde systeem in de linkerhelft van het complexe vlak geplaatst worden, waarmee het systeem asymptotisch stabiel wordt gemaakt).

We zullen nu laten zien hoe ieder regelbaar systeem (4.62) getransformeerd kan worden tot (4.58). Beschouw het systeem (4.62), en veronderstel dat het regelbaar is, d.w.z.

$$\text{rang}\left[b \vdots Ab \vdots A^2 b \vdots \cdots \vdots A^{n-1} b\right] = n \tag{4.63}$$

Uit de lineaire algebra weten we dan dat er een eenduidige n-dimensionale rijvector $k = [k_1, \cdots, k_n]$ is zodanig dat

$$[k_1 \cdots k_n]\left[b \vdots Ab \vdots A^2 b \vdots \cdots \vdots A^{n-1} b\right] = [0 \cdots 0 \;\; 1], \tag{4.64}$$

of uitgeschreven

$$kb = kAb = \cdots = kA^{n-2} b = 0, \quad kA^{n-1} b = 1 \tag{4.65}$$

Definieer nu de $n \times n$ matrix

$$T = \begin{bmatrix} k \\ kA \\ \vdots \\ kA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

Op basis van (4.65) concluderen we dat

$$\begin{bmatrix} k \\ kA \\ \vdots \\ kA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bAb & \cdots & A^{n-1} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Omdat de matrix in het rechterlid van (4.67) rang n heeft geldt noodzakelijkerwijs ook dat rang $T = n$. Dus $x = Tz$, of uitgeschreven

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ kA \\ \vdots \\ kA^{n-1} \end{bmatrix} z \tag{4.68}$$

definieert een lineaire coordinatentransformatie als beschreven in Hoofdstuk 2.1.
Hoe ziet het systeem (4.62) er in de nieuwe coördinaten $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ uit? Dit is het gemakkelijkst na te gaan door $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n$ uit te schrijven. Immers, volgens (4.65) geldt

$$\dot{x}_1 = k\dot{z} = k(Ax + bu) = kAx = x_2$$

en analoog

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= kA\dot{z} = kA(Az + bu) = kA^2z + kAbu = k^2Az = x_3 \\ \dot{x}_3 &= \cdots = x_4 \\ \dot{x}_{n-1} &= \cdots = x_n \end{aligned}$$

terwijl volgens de laatste vergelijking van (4.65)

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= kA^{n-1}\dot{z} = kA^{n-1}(Az + bu) = kA^nz + kA^{n-1}bu = \\ &= kA^nz + u \end{aligned}$$

Schrijven we nu

$$kA^nz = kA^nT^{-1}x = -[p_0 p_1 \cdots p_{n-1}]x$$

voor zekere coëfficiënten p_0, $p_1, \cdots, p_{n-1}$, dan volgt dat

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -p_0 & \cdots & \cdots & -p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Verder kunnen we de uitgangsvergelijking $y = cz$ uitdrukken als

$$y = cz = cT^{-1}x = [q_0 \cdots q_{n-1}]x$$

voor zekere coëfficiënten $q_0, q_1, \cdots, q_{n-1}$, en we zien dat het systeem in de nieuwe coördinaten $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de vorm (4.58) aanneemt.

Voorbeeld 4.3.2. Beschouw het regelbare systeem $\dot{z} = Az + bu$, $y = cz$ met

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.69}$$

De oplossing van $kb = 0$ en $kAb = 1$ wordt gegeven door $k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$. De transformatiematrix T wordt dus gegeven door $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, en in de nieuwe coördinaten $x = Tz$ wordt het systeem gegeven door

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \tag{4.70}$$

$$\tag{4.71}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

We concluderen dus dat voor ieder regelbaar systeem met scalaire ingang en uitgang de eigenwaarden van het teruggekoppelde systeem naar believen in te stellen zijn m.b.v. een terugkoppeling (4.59). We formuleren dit als de volgende stelling.

Stelling 4.3.3. Beschouw een lineair systeem

$$\dot{x} = Ax + bu, u \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \tag{4.73}$$

dat *regelbaar* is. Zij $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ een willekeurige verzameling van n complexe getallen, zodanig dat als $\lambda \in \Lambda$ dan ook de toegevoegd complexe $\bar{\lambda} \in \Lambda$. Dan bestaat er een terugkoppeling $u = fx$ met f een n-dimensionale rijvektor, zodanig dat de eigenwaarden van $A + bf$ gelijk zijn aan Λ.
In het bijzonder bestaat er een terugkoppelingsvektor f zodanig dat de eigenwaarden van $A + bf$ allen een reëel deel *kleiner* dan 0 hebben, en dus het teruggekoppelde systeem $\dot{x} = (A + bf)x$ *asymptotisch stabiel* is.

Zonder bewijs vermelden we dat dit resultaat ook andersom geldt: als er voor iedere verzameling Λ als boven een f bestaat zodanig dat de eigenwaarden van $A + bf$ gelijk zijn aan Λ, dan is het systeem regelbaar. Verder kan hetzelfde resultaat ook aangetoond worden voor systemen met een *willekeurig* aantal ingangen.

Opmerking Systemen kunnen ook *instabiel* worden door het optreden van (ongewenste) terugkoppeling. Een bekend voorbeeld is het “rondzingen” indien de microfoon te dicht bij de luidspreker wordt geplaatst: de output van de luidspreker wordt direkt door de microfoon opgepikt en teruggekoppeld zodanig dat het signaal steeds meer versterkt wordt (tot de maximale geluidssterkte van de luidspreker).

Waarneembaarheid als systeemeigenschap komt direkt in beeld indien er eigenlijk toestandsterugkoppeling nodig is voor het bereiken van het regeldoel, terwijl slechts

de uitgangen en de ingangen direct meetbaar zijn. Indien het systeem waarneembaar is zijn er goede methoden om op basis van de kennis van ingangen en uitgangen een robuuste *schatting* te maken van de toestand (die immers eenduidig wordt vastgelegd door het ingangs- en uitgangssignaal op een tijdsinterval!), en i.p.v. de *echte* toestand deze *schatting* van de toestand terug te koppelen.
De geïnteresseerde lezer verwijzen we naar de uitvoerige literatuur over dit onderwerp.

4.3.3 Set-point tracking

Als typische illustratie van regelontwerp zullen we nu het voorbeeld van "set-point tracking" d.m.v. foutterugkoppeling behandelen.
Beschouw een lineair systeem met scalaire ingang u en scalaire uitgang y gegeven als in Voorbeeld 4.3.1 door een overdrachtsfunctie

$$G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_{n-1}s^{n-1} + \cdots + q_1 s + q_0}{s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1 s + p_0} \tag{4.74}$$

Het regelprobleem is om de ingang u zo te bepalen dat de uitgang y rond een gewenst constant "set-point" y_{gewenst} wordt gehouden. Dit willen we bereiken door de ingang u te baseren op een i.h.a. gemakkelijk waar te nemen grootheid, namelijk de fout e gegeven door

$$e(t) = y_{\text{gewenst}} - y(t) \tag{4.75}$$

De eenvoudigste strategie om dit te bewerkstelligen is m.b.v. een *proportionele terugkoppeling*

$$u(t) = k_p e(t) \tag{4.76}$$

met $k_p \in \mathbb{R}$ een nader te bepalen constante. Het idee is om naarmate $y(t)$ meer afwijkt van $y_{gewenst}$, en dus de fout $e(t)$ groot is, de ingangsactie van het systeem op tijdstip t op te voeren zodanig dat (hopelijk) de fout kleiner gaat worden.
Schrijven we het systeem beschreven door de overdrachtsfunctie (4.74) als een hogereorde differentiaalvergelijking in u en y (zie ook (2.70))

$$\frac{d^n}{dt^n}y + p_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \cdots + p_1\frac{d}{dt}y + p_0 y = q_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u + \cdots + q_1\frac{d}{dt}u + q_0 u \tag{4.77}$$

dan verkrijgen we als resultaat van (4.75) en (4.76) het volgende teruggekoppelde systeem:

$$\begin{aligned} \tfrac{d^n}{dt^n}y + p_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \cdots + p_0 y &= q_{n-1}\tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u + \cdots + q_0 u \\ u &= k_p e \\ e &= y_{\text{gewenst}} - y \end{aligned} \tag{4.78}$$

Constante oplossingen $y(t) = y_\infty$, $u(t) = u_\infty$ en $e(t) = e_\infty$ van dit stelsel voldoen dus aan de vergelijkingen

$$\begin{aligned} p_0 y_\infty &= q_0 u_\infty \\ u_\infty &= k_p e_\infty \\ e_\infty &= y_{\text{gewenst}} - y_\infty \end{aligned} \tag{4.79}$$

Oplossen van (4.79) naar y_∞ levert

$$y_\infty = \frac{q_0 k_p}{p_0 + q_0 k_p} y_{\text{gewenst}}, \tag{4.80}$$

en we concluderen dat indien $p_0 \neq 0$ de evenwichtswaarde y_∞ *afwijkt* van het gewenste set-point y_{gewenst}. Alleen door k_p voldoende groot te nemen geldt bij benadering $y_\infty \approx y_{\text{gewenst}}$; echter, een grote waarde van k_p kan nadelen hebben (te grote regelactie, of zelfs instabiliteit).

Wat is een oplossing van dit dilemma? Een oplossing is om niet slechts de fout e terug te koppelen, maar ook de *integraal* van de fout, d.w.z. in plaats van (4.76)

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau \tag{4.81}$$

met k_i een nader te bepalen constante. Dit wordt wel *proportionele-integrerende* (PI) terugkoppeling genoemd. Differentiëren van (4.81) levert

$$\frac{du}{dt} = k_p \frac{de}{dt} + k_i e, \tag{4.82}$$

en dus voldoet het gesloten-lus systeem in dit geval aan de gekoppelde vergelijkingen

$$\begin{aligned} \tfrac{d^n}{dt^n} y + p_{n-1} \tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y + \cdots + p_0 y &= q_{n-1} \tfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u + \cdots + q_0 u \\ \tfrac{du}{dt} &= k_p \tfrac{de}{dt} + k_i e \\ e &= y_{\text{gewenst}} - y \end{aligned} \tag{4.83}$$

en de evenwichtswaarden y_∞, u_∞ en e_∞ zijn de oplossing van

$$\begin{aligned} p_0 y_\infty &= q_0 u_\infty \\ 0 &= k_i e_\infty \\ e_\infty &= y_{\text{gewenst}} - y_\infty \end{aligned} \tag{4.84}$$

Derhalve geldt $e_\infty = 0$ en $y_\infty = y_{\text{gewenst}}$!
Voor de *stabiliteit* van deze evenwichtsoplossing dienen we de differentiaalvergelijking in $y_{\text{gewenst}} - y = e$ te beschouwen, die wordt gegeven door

$$\left[p(\frac{d}{dt})\frac{d}{dt} + q(\frac{d}{dt})(k_p \frac{d}{dt} + k_i) \right] e(t) = 0, \tag{4.85}$$

De parameters k_p en k_i moeten nu zodanig ingesteld te worden dat $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$. Volgens Propositie 2.1.12 dienen we daartoe het volgende polynoom te bekijken

$$p_{c\ell}(s) := p(s)s + q(s)(k_p s + k_i), \tag{4.86}$$

en k_p en k_i zodanig te bepalen dat alle nulpunten λ van dit polynoom voldoen aan $\text{Re}\lambda < 0$.

Voorbeeld 4.3.4 (Automatisch cruise control systeem). Een eenvoudig model van de dynamica van een auto wordt gegeven door

$$M\frac{dv}{dt}(t) = cu(t) - R(v(t)) \tag{4.87}$$

met M de massa van de auto, c een constante, R de wrijvingsfunktie (t.g.v. lucht- en wegweerstand), en $u \in [0, 1]$ de klepopening van de motor. De waarde $u = 0$ correspondeert met een gesloten klep, en $u = 1$ met een volledig geopende klep.
We zullen in eerste instantie aannemen dat de wrijvingsfunktie een *lineaire* functie $R(v) = Bv$ is, met B een constante. Zij nu v_r de gewenste kruissnelheid van de auto. Het wiskundige model van de automatische cruise controller is een PI-terugkoppeling

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)d\tau \tag{4.88}$$

met $e(t) = v_r - v(t)$ de afwijking t.o.v. de kruissnelheid v_r. Het teruggekoppelde systeem wordt gegeven door (vervang in (4.87) v door $v_r - e$, en vul (4.88) in)

$$-M\frac{de}{dt}(t) = c\left[k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)d\tau \right] + Be(t) - Bv_r \tag{4.89}$$

Differentiëren naar t levert de volgende tweede-orde differentiaalvergelijking in e

$$-M\frac{d^2e}{dt^2}(t) = ck_p\frac{de}{dt}(t) + ck_i e(t) + B\frac{de}{dt}(t). \tag{4.90}$$

De asymptotische stabiliteit (convergentie van $e(t) = v_r - v(t)$ naar 0) wordt gegarandeerd door k_p en k_i zodanig in te stellen dat de nulpunten λ van het polynoom

$$Ms^2 + (ck_p + B)s + ck_i \tag{4.91}$$

voldoen aan $\text{Re}\lambda < 0$. Een goede keuze kan zijn om k_p en k_i zodanig in te stellen dat het systeem kritisch gedempt is (zie Voorbeeld 2.1.8); dit correspondeert met een redelijk

snelle convergentie zonder “overshoot”. De goede instelling van de regelparameters k_p en k_i (snelle convergentie, weinig overshoot, robuustheid van het geregelde systeem t.o.v. onzekerheid) behoort tot het gebied van de regeltechniek.
Een realistischer wrijvingsfunktie is *kwadratisch* in de snelheid

$$R(v) = Bv^2 \tag{4.92}$$

Ook voor deze situatie kan aangetoond worden (zie Opgave 4.13) dat de PI-cruise controller (4.88) convergentie van de fout e naar 0 oplevert.

4.4 Samenvatting van Hoofdstuk 4

Twee fundamentele begrippen uit de wiskundige systeemtheorie, regelbaarheid en waarneembaarheid, zijn geïntroduceerd. Voor lineaire tijdsinvariante systemen is een gemakkelijk te verifiëren karakterisatie van deze beide eigenschappen (middels de regelbaarheids- en waarneembaarheidsmatrix) afgeleid. Terugkoppeling is besproken als een fundamentele notie in het regelen van systemen. In het bijzonder is voor een lineair regelbaar systeem met scalaire ingang aangetoond hoe het systeem asymptotisch stabiel gemaakt kan worden door toestandsterugkoppeling. Foutterugkoppeling is gebruikt voor het probleem van set-point tracking.

5

Hybride systemen

5.1 Inleiding

In Hoofdstuk 1 hebben we voorbeelden gezien van verschillende systeemklassen, afhankelijk van de gebruikte tijdsas, de aannamen op toestands-, ingangs- en uitgangsruimten (eindig, eindig-dimensionaal, oneindig-dimensionaal), en de aannamen op de beschrijvende vergelijkingen (lineair of niet-lineair, tijdsinvariant of tijdsvariant, etc.). Indien we vooral de gebruikte *tijdsas* T in aanmerking nemen kunnen we in ieder geval drie systeemklassen onderscheiden:

(a) $T = \mathbb{R}$, de *continue tijd systemen*.

(b) $T = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, de *discrete tijd systemen*.

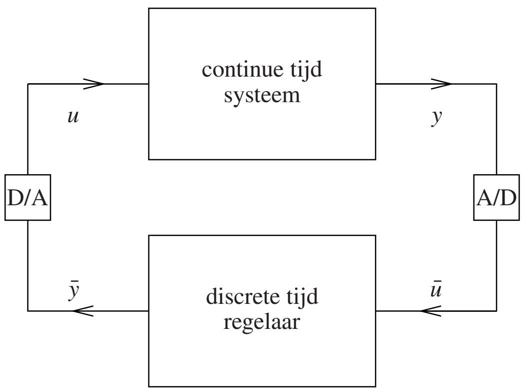
(c) $T = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, waarbij evenwel alleen de *volgorde* van de tijdstippen van belang is, en de fysische tijdslengte tussen de verschillende tijdstippen niet is vastgelegd. Deze systemen worden wel *discrete-gebeurtenis* systemen genoemd; een bijzondere deelklasse zijn de *eindige automaten*.

De theorie van Hoofdstukken 2, 3 en 4 (dynamica, ingangs-uitgangsanalyse, systemen zonder opgelegde ingangs-uitgangsstruktuur, regelbaarheid, waarneembaarheid en enkele regelconcepten) werd behandeld voor *iedere systeemklasse afzonderlijk*. Dit heeft goede redenen, omdat de analyse van deze drie systeemklassen, benevens het benodigde wiskundige gereedschap, nogal van elkaar afwijkt.
Echter, in veel reële systemen zijn aspecten van deze drie verschillende systeemklassen *tegelijkertijd* aanwezig. Deze systemen worden wel *hybride* systemen genoemd. In sommige gevallen is dit hybride karakter inherent in het systeem aanwezig. Zo kan men de beweging van een massa bevestigd aan een touw beschouwen. Indien het touw *slap* is beweegt de massa zich als een vrije massa. Op het moment echter dat het touw *strak* gaat staan, treedt een andere dynamica in werking; de massa beweegt onder invloed van de trekkracht van het touw. Men kan dit beschrijven als een automaat met twee discrete toestanden (touw slap of touw strak), waar met beide discrete toestanden een *verschillende* continue tijd dynamica is geassocieerd.

In andere gevallen is het hybride karakter van het systeem het gevolg van de *koppeling* (interconnectie) van twee systemen uit verschillende systeemklassen. In het bijzonder kan dit optreden bij de regeling van twee systemen. Beschouw bijvoorbeeld de thermostaatregeling van een verwarmingssysteem. Een verwarmingssysteem kan voor veel doeleinden gemodelleerd worden als een continue tijd systeem, met als ingang de gastoevoer. Verder kan de kamertemperatuur als een continue uitgang worden beschouwd. De thermostaat zal op basis van deze kamertemperatuur en een gewenste (door de gebruiker ingestelde) temperatuur op de één of andere wijze de gastoevoer (en daaraan gekoppeld het brandermechanisme) regelen. In de meeste verwarmingssystemen wordt de gastoevoer ofwel op maximaal (vol aan) ofwel op nul gezet, afhankelijk van het feit of het verschil van de kamertemperatuur met de gewenste temperatuur een bepaalde drempelwaarde overschrijdt. Het alzo geregelde systeem heeft derhalve hybride karakteristieken. Complexe hybride systemen treden ook op in hiërarchische of "multi-agent" regelsystemen, waar verschillende regeldoelen en/of regelaars gecoördineerd moeten worden. Denk bijvoorbeeld aan een CV-installatie die ook als warmwaterboiler functioneert. Ook de zgn. "embedded systems" (computer software gekoppeld aan fysische componenten) zijn voorbeelden van hybride systemen.
Alvorens in Sectie 5.3 tot een meer formele bespreking van zulke systemen over te gaan, zullen we in Sectie 5.2 een andere mengvorm van systeemklassen behandelen, namelijk die tussen (a) continue-tijd systemen en (b) discrete-tijd systemen. Deze mengvorm wordt meestal met de specifiekere naam van "*sampling*" (bemonstering) aangeduid.

5.2 Sampling en digitale regeling

In veel gevallen vindt de regeling van continue tijd ingangs-toestands-uitgangs systemen plaats d.m.v. een discrete tijd regelaar (bijvoorbeeld een computer). Schematisch kunnen we dit als in Figuur 5.1 voorstellen: Hier geeft A/D een zogenaamde A/D (Analoog naar



Figuur 5.1: Digitale regeling.

Digitaal) omzetter weer, die het continue tijd uitgangssignaal $y(t),\ t \in \mathbb{R}$, van het te regelen systeem transformeert in een discrete tijd ingangssignaal $\bar{u}(k),\ k \in \mathbb{Z}$, voor de regelaar. Andersom duidt D/A een D/A (Digitaal naar Analoog) omzetter aan, die het discrete tijd uitgangssignaal $\bar{y}(k),\ k \in \mathbb{Z}$, van de regelaar omzet in een continue tijd ingangssignaal $u(t),\ t \in \mathbb{R}$, voor het continue tijd systeem.
Een typisch voorbeeld van een A/D en D/A omzetter is gebaseerd op de zogenaamde "*sample-and-hold*" techniek, die wordt beschreven als volgt.
Kies een "*sampling*" (of "bemonsterings") periode $\delta > 0$, en beschouw de *sampling tijden*

$$-2\delta,\ -\delta,\ 0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta, \cdots \tag{5.1}$$

De A/D omzetter neemt nu simpelweg de waarden van $y(t)$ op de sampling tijden, d.w.z.

$$\bar{u}(k) = y(k\delta), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Andersom, zij $\bar{y}(k),\ k \in \mathbb{Z}$, de discrete tijd uitgang van de regelaar. De "hold" D/A omzetter transformeert dit in een continu ingangssignaal $u(t)$ door de waarde van $\bar{y}(k)$ op het bemonsteringsinterval $[k\delta, (k+1)\delta]$ vast te houden, d.w.z.

$$u(t) = \bar{y}(k), \quad t \in [k\delta, (k+1)\delta) \tag{5.3}$$

Beschouw in het bijzonder een lineair tijdsinvariant ingangs-toestands-uitgangssysteem in continue tijd

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad u \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n \\ y &= Cx, \qquad\qquad y \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{5.4}$$

en zij het ingangssignaal $u(t),\ t \in \mathbb{R}$, als gegeven in (5.3). Wegens (2.9) kunnen we de toestand $x((k+1)\delta)$ op het *eind* van een sampling interval $[k\delta, (k+1)\delta]$ als volgt uitdrukken in de toestand $x(k\delta)$ aan het *begin* van het sampling interval en het constante ingangssignaal $u(t) = \bar{y}(k)$, voor $t \in [k\delta, (k+1)\delta)$:

$$\begin{aligned} x((k+1)\delta) &= e^{A((k+1)\delta - k\delta)}x(k\delta) + \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} e^{A((k+1)\delta - s)}B\bar{y}(k)ds \\ &= e^{A\delta}x(k\delta) + (\int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)}Bd\tau)\bar{y}(k) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Definiëren we dus $\tilde{x}(k) := x(k\delta)$, dan geldt

$$\begin{aligned} &\tilde{x}(k+1) = F\tilde{x}(k) + G\bar{y}(k), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &F := e^{A\delta}, \quad G := \int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)}Bd\tau. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Verder wordt de gesampelde uitgang $\bar{u}(k)$ als in (5.2) gegeven door

$$\bar{u}(k) = y(k\delta) = Cx(k\delta) = C\tilde{x}(k) \tag{5.7}$$

We concluderen dat het *continue tijd* systeem (5.4) tesamen met de "interface" gegeven door A/D-omzetter (5.2) en D/A-omzetter (5.3) ook gerepresenteerd wordt door het *discretetijd* systeem

$$\begin{array}{rcl} \tilde{x}(k+1) & = & F\tilde{x}(k) + G\bar{y}(k) \\ & & \qquad\qquad k \in \mathbb{Z} \\ \bar{u}(k) & = & C\tilde{x}(k) \end{array} \tag{5.8}$$

met F en G gegeven als in (5.6). Het ontwerp van de discrete tijd regelaar kan dus direkt gebaseerd worden op dit discrete tijd systeem verkregen door sampling.

5.3 Supervisory control

In veel toepassingen is de regelaar een *eindige ingangs-uitgangsautomaat* (zoals kort besproken in Hoofdstuk 1):

$$C: \begin{array}{rcl} q(k+1) & = & F(q(k), i(k)) \\ & & \qquad\qquad k \in \mathbb{Z} \\ o(k) & = & H(q(k)) \end{array} \tag{5.9}$$

met de toestand $q(k)$ een waarde aannemend in een *eindige* toestandsverzameling Q, de ingang $i(k)$ in een *eindige* ingangsverzameling I, en de uitgang $o(k)$ in een *eindige* uitgangsverzameling O. De tijdstippen $k \in \mathbb{Z}$ corresponderen in dit geval *niet* met een digitale fysische tijd (zoals in het geval van digitale regeling), maar geven slechts de *volgorde* van de gebeurtenissen (de overgangen) in de automaat aan.
Evenals in Figuur 5.1 resulteert de koppeling van zo'n regelaar aan een continue tijd ingangs-toestands-uitgangssysteem

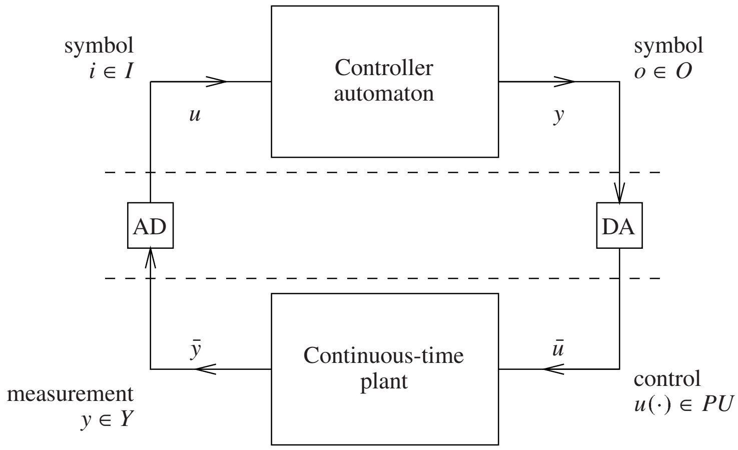
$$P: \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)) \\ & & \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ y(t) & = & h(x(t), u(t)) \end{array} \tag{5.10}$$

met $x(t) \in X,\ u(t) \in U,\ y(t) \in Y$, in een schema van de volgende vorm, zie Figuur 5.2. De werking van de A/D en D/A omzetters in Figuur 5.2 is echter anders dan in Figuur 5.1 (en, in het bijzonder, is *geen* "sample-and-hold" omzetting). Het grote verschil is dat de *continue tijd* van systeem (5.10) op de een of andere wijze aan de *reeks van gebeurtenissen* van (5.9) moet worden gekoppeld. Dit kan bewerkstelligd worden door de A/D omzetter te definiëren als een afbeelding

$$AD : Y \times Q \to I \tag{5.11}$$

die aan iedere waarde van de uitgang y een discreet ingangssymbool $i \in I$ toekent, eventueel afhangend van de waarde van de toestand q waarin de regelaar zich bevindt. Andersom is de D/A omzetter gegeven als een afbeelding

$$DA : O \to \mathcal{U}, \tag{5.12}$$



Figuur 5.2: Supervisory control.

die aan ieder uitgangssymbool $o \in O$ een continue tijd *ingangssignaal* $u : [0, \infty] \to U$ toevoegt. De gesloten-lus hybride dynamica is nu als volgt. Neem aan dat de regelaar in toestand q is. De toestand van P evolueert volgens de vergelijkingen (5.10) met als ingangssignaal $u = DA(o)$ en $o = H(q)$. De afbeelding $AD(\cdot, q)$ voegt nu voor iedere $t \in \mathbb{R}$ aan de uitgang $y(t)$ een symbool $i \in I$ toe. Op het tijdstip dat de waarde van dit symbool *verandert* (zeg van i in i_{nieuw}) vindt een *overgang* in de regelaar plaats volgens de vergelijking

$$q_{\text{nieuw}} = F(q, i_{\text{nieuw}}) \tag{5.13}$$

terwijl ook het ingangssymbool van de regelaar verandert in

$$o_{\text{nieuw}} = H(q_{\text{nieuw}}) \tag{5.14}$$

resulterend in een *nieuw* ingangssignaal u_{nieuw} voor het continue tijd systeem P. We zien dus dat wanneer de continue uitgang $y(t)$ bepaalde waarden overschrijdt, er een *gebeurtenis* in de regelaar plaats vindt, resulterend in een nieuwe toestand van de regelaar en een nieuw continu ingangssignaal voor het te regelen continue tijd systeem. Dit is een voorbeeld van *supervisory control*: slechts indien de continue uitgang bepaalde kritische waarden bereikt verandert de instelling van de regeling. De thermostaatregeling zoals kort beschreven in Sectie 5.1 kan binnen dit kader gemodelleerd worden.

Evenals in het geval van digitale regeling d.m.v. sampling-and-hold (Sectie 5.2) kan geprobeerd worden om het continue tijd ingangs-toestands-uitgangssysteem P *tesamen* met de A/D en D/A omzetter (de "interface") te representeren als een (eindige) ingangs-uitgangs-automaat (net zoals in Sectie 5.2 het lineaire continuetijd systeem (5.4) tesamen met de sample-and-hold A/D en D/A omzetters gerepresenteerd werd als het discrete tijd systeem (5.8)). Indien dit mogelijk is kan het ontwerp en de analyse van een regelaar als in Figuur 5.2 teruggebracht worden tot het ontwerp en de analyse van een regelaar voor een eindige ingangs-uitgangsautomaat.

5.4 Hybride automaten

Hoewel de configuratie van Figuur 5.2 leidt tot een hybride systeem is de notie van hybride systeem veel algemener. Een voor veel doeleinden redelijk geschikt model voor een *algemeen* hybrid systeem is het *hybride automaten* model.

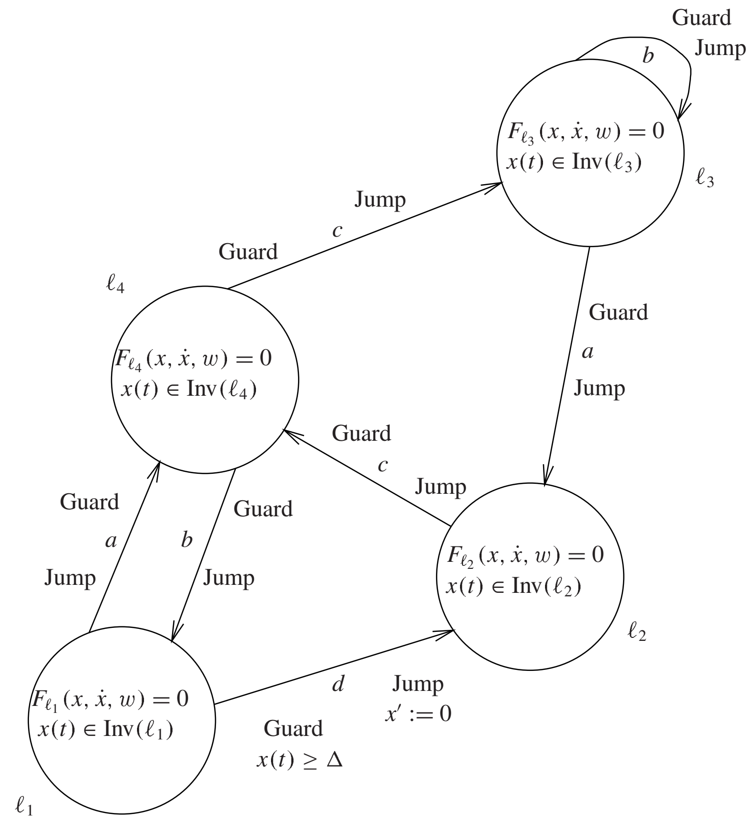
Definitie 5.4.1. Een *hybride automaat* wordt beschreven door een zeventupel $(L, X, E, A, W, Inv, Act)$, met

- L een eindige verzameling (de verzameling van *discrete toestanden* of *locaties*). De elementen van L vormen de *knopen* van een graaf.
- X is de continue toestandsruimte; $X \subset \mathbb{R}^n$.
- E is een verzameling van kanten van de graaf. Ieder element van E representeert een *overgang* (of *gebeurtenis*), en bestaat op zichzelf weer uit een viertupel $(\ell, Guard_{\ell\ell'}, Sprong_{\ell\ell'}, \ell')$, met $\ell, \ell' \in L$, $Guard_{\ell\ell'}$ een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, en $Sprong_{\ell\ell'}$ een relatie gedefinieerd door een deelverzameling van $X \times X$. De overgang van ℓ naar ℓ' kan plaatsvinden (is "enabled") indien de continue toestand x zich in $Guard_{\ell\ell'}$ bevindt. Tijdens deze overgang springt de continue toestand x naar een waarde x' zodanig dat $(x, x') \in Sprong_{\ell\ell'}$.
- A is een eindige verzameling van de symbolen. De elementen van A zijn de labels van de kanten van de graaf.
- $W = \mathbb{R}^q$ is de verzameling van continue externe variabelen.
- Inv is een afbeelding van de locaties L naar de verzameling van deelverzamelingen van X, i.e., $Inv(\ell) \subset X$ voor iedere $\ell \in L$. Indien het hybride systeem in locatie ℓ is dan dient de continue toestand x zich in $Inv(\ell)$, de *locatie-invariant* van ℓ, te bevinden. Zo niet, dan moet een overgang naar een andere locatie plaatsvinden.
- Act is een afbeelding die aan iedere locatie $\ell \in L$ een stelsel impliciete differentiaal vergelijkingen (vgl. Definitie 3.2.1)

  $$F_\ell(\dot{x}, x, w) = 0, \quad x \in X, \quad w \in W \tag{5.15}$$

  toekent, die de continue tijd evolutie van de continue toestand en externe variabelen voor iedere locatie (discrete toestand) ℓ beschrijft. ∎

De beschrijving van een hybride automaat wordt samengevat in Figuur 5.3.



Figuur 5.3: Hybride automaat.

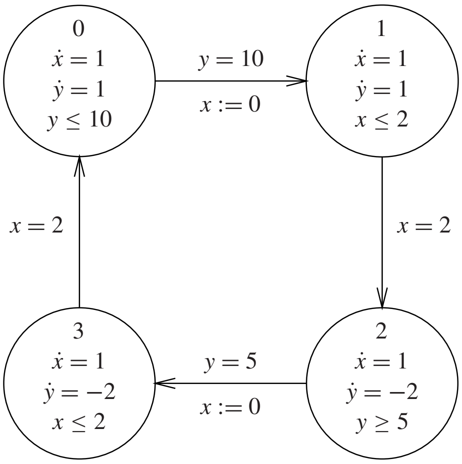
Voorbeeld 5.4.2 (Waterhoogteregeling). De waterhoogte in een tank wordt geregeld door een pomp die aan en uit gezet kan worden. Als de pomp *uit* staat daalt de waterhoogte h, tengevolge van een constante afvoer uit de tank, volgens de constante differentiaal vergelijking

$$\dot{h} = -2. \tag{5.16}$$

Indien de pomp *aan* staat stijgt de waterhoogte volgens

$$\dot{h} = 1. \tag{5.17}$$

Neem nu aan dat de waterhoogte continu wordt gemeten (door een monitor), maar dat het signaal {pomp aan} of {pomp uit} gegeven door de regelaar verbonden aan de monitor pas na 2 seconden de pomp in de gewenste toestand brengt (een tijdsvertraging). Stel dat het regeldoel is om de waterhoogte tussen, zeg, $h = 1$ en $h = 12$ te houden. Een mogelijke regelwet is nu om het signaal {pomp aan} te zenden indien $h \leq 5$, en {pomp uit} indien $h \geq 10$. Het gesloten-lus systeem kan dan worden weergegeven door de volgende hybride automaat in Figuur 5.4. De hybride automaat heeft vier locaties: in locaties 0 en



Figuur 5.4: Waterhoogteregeling.

1 is de pomp aan; in locaties 2 en 3 is de pomp uit. De kloktijd τ wordt gebruikt om de tijdsvertragingen te specificeren: τ geeft in locaties 1 en 3 aan hoeveel seconden geleden het signaal {pomp uit}, respectievelijk {pomp aan} is verstuurd vanuit de monitor. Langs iedere kant van de graaf is de Guard van de transitie, benevens de Sprong (“reset”) van de continue toestandsvariabele τ aangegeven. Door direkte berekening kan nagegaan worden dat de voorgestelde regeling inderdaad het regeldoel bewerkstelligt. ■

5.5 Samenvatting van Hoofdstuk 5

Dit hoofdstuk beoogt een eerste inleiding te zijn tot het brede gebied van hybride systemen. De voorbeelden van “sampling” en “supervisory control” zijn kort besproken, en tenslotte is het algemene kader van hybride automaten beschreven.

6

Opgaven

1.1 Beschouw een lineair ingangs-toestands-uitgangssysteem in discrete tijd

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & A(k)x(k)+B(k)u(k) \\ & & \qquad\qquad\qquad\qquad k\in\mathbb{Z} \\ y(k) & = & C(k)x(k)+D(k)u(k) \end{array}$$

Laat zien dat de toestandsevolutiefunctie φ voldoet aan

1. $\varphi(k_1, k_0, x_{01}+x_{02}, u_1+u_2) =$
   $\varphi(k_1, k_0, x_{01}, u_1) + \varphi(k_1, k_0, x_{02}, u_2)$
2. $\varphi(k_1, k_0, \lambda x_0, \lambda u) = \lambda\varphi(k_1, k_0, x_0, u)$

voor alle $k_1 \geq k_0 \in \mathbb{Z}$, $x_{01}, x_{02}, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2, u \in \mathcal{U}$, en alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.2 Toon aan dat een lineair systeem
$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$
de volgende eigenschap heeft.
Zij $(u_1(t), x_1(t), y_1(t))$, $t \in \mathbb{R}$, en $(u_2(t), x_2(t), y_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$ twee oplossingen.
Dan is ook

$$\lambda_1(u_1(t), x_1(t), y_1(t)) + \lambda_2(u_2(t), x_2(t), y_2(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

een oplossing, voor iedere $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

2.1 Beschouw een $n \times n$ matrix A met onderling verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Beschouw de bijbehorende eigenvectoren $v_1, \cdots, v_n$ (d.w.z. $v_i \neq 0$ en $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \cdots, n$). Toon aan dat $v_1, \cdots, v_n$ *onafhankelijk* zijn (d.w.z., indien $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$ voor zekere constanten $c_1, \cdots, c_n$, dan $c_1 = \cdots = c_n = 0$).

2.2 De stationaire responsie y_s op een constant ingangssignaal
$u(t) = c \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$, wordt gegeven door

$$y_\infty = [-CA^{-1}B + D]c.$$

Toon dit op de volgende twee manieren aan:

(i) Beschouw het systeem $\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m$, met Re $\lambda < 0$ voor alle eigenwaarden λ van A. Beschouw een *constant* ingangssignaal $\bar{u}(t) = c \in \mathbb{R}^m$. Bepaal het bijbehorende evenwichtspunt $\bar{x}(t) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Toon aan dat $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$. Zij $y = Cx + Du$. Wat is $\lim_{t\to\infty} y(t)$?

(ii) Middels de formule $y_s(t) = G(s)ce^{st}$, voor de stationaire responsie t.g.v. een ingangssignaal $u(t) = ce^{st}$.

2.3 Een alternatieve methode om de overdrachtsmatrix $G(s)$ van $\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx + Du$, te berekenen is via Laplace transformatie van beide stelsels vergelijkingen. Voer dit uit.

2.4 Laat A een $n \times n$ matrix gegeven als

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{bmatrix}$$

(a) Laat zien dat het karakteristieke polynoom van A gelijk is aan

$$p_0 + p_1 s + \cdots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n$$

(b) Laat λ een eigenwaarde van A. Laat zien dat een bijbehorende eigenvector gegeven wordt door

$$(1\ \lambda\ \lambda^2 \cdots \lambda^{n-1})^T$$

(c) Zij A gegeven door

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

Bepaal e^{At}.

2.5 Laat A de $n \times n$ matrix gegeven in 2.4. Toon aan dat

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} (sI_n - A)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{p(s)}$$

met $p(s) = p_0 + p_1 s + \cdots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n$

2.6 Ga na dat de overdrachtsfunctie van (2.68) gelijk is aan $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)} + d$

2.7 Bereken e^{At} voor

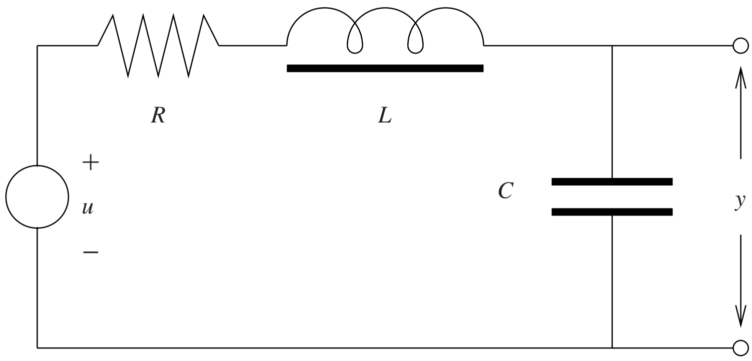
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.8 Leid (2.78) af door herhaald toepassen van (2.76).

2.9 (a) Zij $A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$. Bereken e^{At} m.b.v. de machtreeksdefinitie, en m.b.v. eigenwaarden en eigenvectoren.

(b) Zij $A = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}$. Bereken e^{At}.

2.10 Beschouw het volgende RLC netwerk



Figuur 6.1: RLC netwerk.

met als u de ingangsbronspanning, en y de uitgangspanning over de condensator.

(a) Stel een ingangs-toestands-uitgangsmodel op voor de toestandsvector $x = (q, \varphi)$, met q de lading op de condensator C en φ de flux over de zelfinduktie ($q = Cv_c$, $\varphi = Li_L$).

(b) Bereken de overdrachtsfunctie $G(s)$, en bepaal $G(i\omega)$. Wat is de stationaire responsie op $u(t) = \sin \omega t$?

(c) Wat is de stationaire responsie op $u(t) = c$? (Gebruik Opgave 2.2).

2.11 (a) Beschouw $G(s) = \frac{s+a}{s+b}$. Geef een ingangs-toestands-uitgangsmodel.

(b) Beschouw het lineaire systeem

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} u(\tau) d\tau, \quad u, y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}$$

met $T > 0$ (een "gemiddelde nemer"). Bepaal de overdrachtsfunctie $G(s)$. Is dit m.b.v. een lineair tijdsinvariant systeem te representeren?

2.12 **(Euclidisch delingsalgoritme)**

(a) Zij f en g twee polynomen, met graad $g > 1$. Dan bestaan er polynomen q en r zodanig dat

$$f = qg + r$$

met $r = 0$ of graad $r <$ graad q. (We hebben g op f gedeeld met rest r.)

(b) Zij nu f en g twee polynomen, met graad $g > 1$. Herhaald delen als in (a) levert

$$\begin{array}{rcl} f & = & q_1 g + r_1 \\ g & = & q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 & = & q_3 r_2 + r_3 \end{array}$$

met graad $g >$ graad $r_1 >$ graad $r_2 > \cdots$.
Dit impliceert dat voor een zekere p, $r_{p+1} = 0$, terwijl de laatste vergelijkingen gelijk zijn aan

$$\begin{array}{rcl} r_{p-2} & = & q_p r_{p-1} + r_p \\ r_{p-1} & = & q_{p+1} r_p \end{array}$$

Toon aan dat r_p de grootste gemene deler is van f en g, en dat er polynomen a en b bestaan zodanig dat

$$r_p = af + bg.$$

3.1 Beschouw het systeem (3.7), met de functie

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Laat zien dat er geen functie $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, bestaat zodat "$\dot{y} = u$", in de zin dat $y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} u(s)ds$, $\forall t_0, t$.

3.2 Toon aan dat een lineair tijdsinvariant toestandssysteem met externe variabelen $K\dot{x} + Lx + Mw = 0$ aan de volgende eigenschappen voldoet:

(i) (lineariteit) Zij (x_1, w_1) en (x_2, w_2) oplossingen, dan is ook $\lambda_1(x_1, w_1) + \lambda_2(x_2, w_2)$ een oplossing voor iedere $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) (tijdsinvariantie) Zij (x, w) een oplossing, dan is ook $(S_\tau x, S_\tau w)$ een oplossing voor iedere $\tau \in \mathbb{R}$.

4.1 Bewijs dat het toestandssysteem met externe variabelen $K\dot{x} + Lx + Mw = 0$ regelbaar is d.e.s.d. als

$$\text{rang } [sK + L \vdots M] \quad \text{is constant (onafhankelijk van } s \in \mathbb{C}).$$

4.2 (a) Beschouw het systeem (4.39). Bewijs: (4.39) is onderscheidbaar $\Rightarrow$ (4.39) is waarneembaar.
(**Hint:** toon aan dat als (4.39) onderscheidbaar is, dan zullen twee verschillende toestanden onderscheiden worden door toepassing van de ingangsfunktie $u(k) \equiv 0$.)

(b) Bewijs hetzelfde resultaat voor het systeem (4.46).

4.3 Bewijs dat het systeem $\dot{x} = Ax + Bu, \; y = Cx$ waarneembaar is d.e.s.d.a het stelsel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ 0 &= Cx \end{aligned}$$

slechts de nul-oplossing $x(t) \equiv 0$ heeft.

4.4 Ga de regelbaarheid na van de volgende systemen

(a) $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ met $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ met $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ met $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ met $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(e) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ met $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4.5 Bereken het ingangssignaal $u(k)$ voor het systeem 4.4(b) dat de toestand $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ over doet gaan in $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. Welke $u(k)$ moeten we nemen om terug te sturen naar $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

4.6 Bereken het ingangssignaal $u(t)$ voor het systeem

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

dat $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ doet overgaan in $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ met minimale energie.

4.7 Gegeven is het systeem $\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array}$ met

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Is het systeem waarneembaar? En regelbaar?

(b) Is $x = 0$ een asymptotisch stabiel evenwichtspunt van $\dot{x} = Ax$?

(c) Is het mogelijk met uitgangsterugkoppeling $u(t) = ky(t)$ het systeem asymptotisch stabiel om $x = 0$ te maken?

(d) Bereken een toestandsterugkoppeling $u = fx$ zodanig dat de eigenwaarden van $A + bf$ liggen bij $-1 \pm 2i$, -2.

4.8 Gegeven is het systeem $\dot{x} = Ax + Bu$ met

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ en } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Is $x = 0$ een asymptotisch stabiel evenwichtspunt van $\dot{x} = Ax$?

(b) Is het systeem $\dot{x} = Ax + Bu$ bestuurbaar?

(c) Kunnen we de eigenwaarden plaatsen m.b.v. toestandsterugkoppeling $u = f_0x_1 + f_1x_2 + f_2x_3 + f_3x_4$ in:
i) $-2, -2, -1, -1$
ii) $-2, -2, -2, -1$
iii)$-2, -2, -2, -2$

4.9 Gegeven is de overdrachtsfunctie $G(s)$ van een systeem:

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s-2)(s+3)}$$

(a) Ga na dat $x = 0$ geen asymptotisch stabiel evenwichtspunt is.

(b) Ga na of het voor dit systeem mogelijk is deze overdrachtsfunctie te veranderen in $H_1(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+3)}$ d.m.v. toestandsterugkoppeling.

(c) Is het mogelijk $G(s)$ te veranderen in $H_2(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$?

4.10 Gegeven het waarneembare systeem met één ingang en uitgang

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & Ax(k) + bu(k) \\ y(k) & = & cx(k) \end{array}$$

Bewijs dat we de toestand kunnen bepalen op grond van *alleen* de kennis van de uitgang $y(k), k = 0, 1, 2, \cdots$, d.e.s.d. als $cA^kb = 0$ voor $k = 0, 1, \cdots, n-2$

4.11 Gegeven het n-dimensionale systeem

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & & \\ & & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & & -a_{n-1} \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

Stel de ingangsgrootheid wordt gekozen als $u(k) = -(f_0 \cdots f_{n-1})x(k)$. Bepaal $(f_0 \cdots f_{n-1})$ zodanig dat alle eigenwaarden van het resulterende teruggekoppelde systeem in de oorsprong liggen. Ga na dat $x(n) = \tilde{A}x(0) = 0$ voor willekeurige $x(0)$ en $\tilde{A}$ de systeemmatrix van het teruggekoppelde systeem.

4.12 Toon aan dat de ingangsfunctie $\bar{u} : [0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ geconstrueerd in het bewijs van Stelling 4.1.7 een "ingangsenergie" heeft gelijk aan

$$\int_0^{t_1} \bar{u}^T(s)\bar{u}(s)ds = \left(e^{-At_1}x_1 - x_0\right)\big)^T K^{-1}\left(e^{-At_1}x_1 - x_0\right)$$

(Volgens Propositie 4.1.8 is dit de *minimale* "ingangsenergie" om het systeem van x_0 naar x_1 te sturen.)

4.13 Beschouw een model voor de dynamica van een auto met kwadratische wrijvingsfunctie

$$M\frac{dv}{dt}(t) = cu(t) - Bv^2(t) \tag{6.1}$$

met een PI-regelaar

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)d\tau \\ e(t) & = & v_r - v(t) \end{array} \tag{6.2}$$

Schrijf het geheel in toestandsvorm (door differentiatie van de eerste vergelijking van (6.2)):

$$\begin{array}{rcl} \frac{dv}{dt}(t) & = & \frac{c}{M}u(t) - \frac{B}{M}v^2(t) \\ \frac{du}{dt}(t) & = & -k_p\frac{dv}{dt}(t) + k_i(v_r - v(t)) \\ & = & -k_p\left(\frac{c}{M}u(t) - Bv^2(t)\right) + k_i(v_r - v(t)) \end{array} \tag{6.3}$$

met toestand $x(t) = (v(t), u(t))^T$.

(a) Toon aan dat $v = v_r$, $u = \frac{BM}{c}v_r^2$ een evenwichtspunt van (6.3) is.

(b) Lineariseer het systeem om dit evenwichtspunt, en laat zien dat k_p en k_i zodanig ingesteld kunnen worden dat dit evenwichtspunt asymptotisch stabiel wordt.

Index