

LEREN WISKUNDIG MODELLEREN

Docentenhandleiding bij de TW-modelleerpraktica
(Voorlopige versie; nog niet volledig)

A. van der Meer

29 oktober 2001

1 Inleiding

Een van de kenmerkende aspecten van het ingenieurskarakter van de opleiding Toegepaste Wiskunde is het ontwerpen van wiskundige modellen. Wiskundig modelleren is eigenlijk alleen te leren door het (veel) te *doen*. In het gehele curriculum is daarom ruimte opgenomen om de studenten frequent de gelegenheid te geven om ervaring op te doen met deze activiteit. In §2 wordt een overzicht gegeven van de vakken die rechtstreeks op het leren modelleren zijn gericht.

Als “docentenhandleiding” is dit stuk nogal breed opgezet. Omdat het van groot belang is dat de verschillende modelleerpraktica goed op elkaar aansluiten —dat wil zeggen dat practicum $n + 1$ voortbouwt op hetgeen in practicum n is geleerd— geef ik eerst een samenvatting van de didactische overwegingen die hebben geleid tot de “modelleerlijn” in het TW-curriculum. Van achter naar voren werkend krijgen we dan eerst een beschrijving van wat wiskundig modelleren precies inhoudt, welke *vaardigheden* daarvoor vereist zijn (sommigen noemen dat *eindtermen*), in welke *volgorde* deze het best kunnen worden aangeleerd en welke *onderwijsactiviteiten* daarvoor geschikt zijn.

Uiteraard komen wiskundige modellen nog op vele andere plaatsen in het curriculum aan de orde. In §2 beperken we ons echter tot de vakken die uitdrukkelijk in eerste instantie zijn gericht op het verwerven van basisvaardigheden die voornamelijk bij wiskundig modelleren van belang zijn. In §4 wordt aan de hand van de daaraan voorafgaande beschrijving van het modelleerproces (§3) een inventarisatie van deze vaardigheden gegeven, alsmede van de wijze waarop in het onderwijs expliciet aandacht wordt geschonken aan deze vaardigheden.

Vanaf §5 tenslotte wordt voor elk modelleervak afzonderlijk in detail aangegeven wat van de docent wordt verwacht om studenten de gelegenheid te geven de in §4 geïnventariseerde vaardigheden meester te worden.

2 Modelleeronderwijs bij TW

Het modelleeronderwijs in TW bestaat uit de volgende vakken:

WM1 Wiskundig Modelleren 1. Eerste jaar, 4 SP.

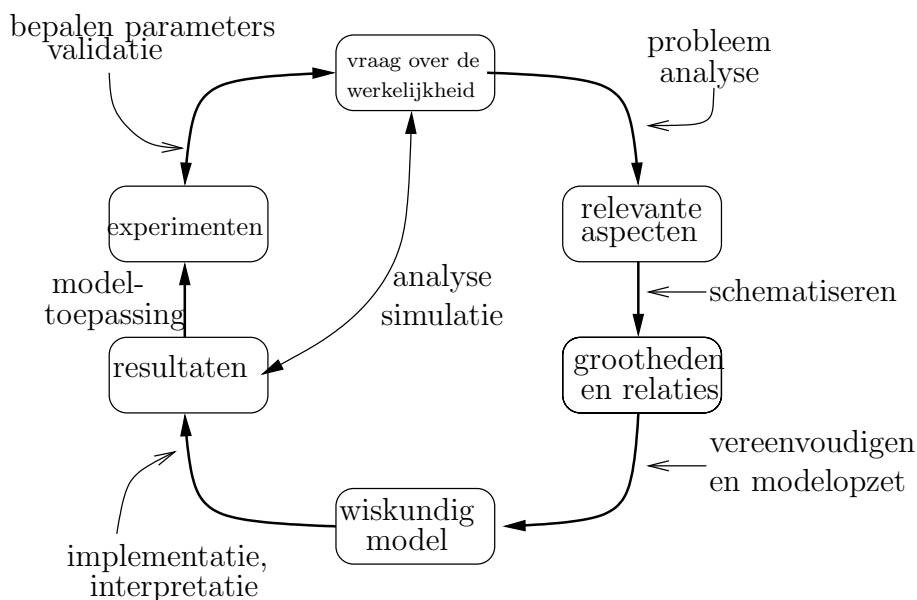
Studenten werken (meestal in tweetallen) aan vier of vijf opdrachten van beperkte omvang.

- WM2** Wiskundig Modelleren 2. Tweede jaar, 3 SP.
Inleiding van een enkel hoorcollege. Daarna werken de studenten in vier-
tallen aan één opdracht.
- WM3** Wiskundig Modelleren 3. Derde jaar, 3 SP.
Hoorcollege met opdrachten over standaardmodellen en -methoden.
- WM4** Wiskundig Modelleren 4. Derde jaar, 3 SP.
Groepsopdracht over een complex probleem.
- MDOO** Multidisciplinaire Ontwerpopdracht. Vierde jaar, 6 SP.
(eventueel gekoppeld aan een literatuuropdracht van 4 SP)

In de meeste gevallen zijn aan de stage en de afstudeeropdracht uiteraard ook de nodige modelleeractiviteiten verbonden.

3 Modelleren als cyclisch proces

Als achtergrond voor de docent geef ik hier een beschrijving van de activiteit die we met “wiskundig modelleren” aanduiden als een cyclisch proces. De achtereenvolgende deelactiviteiten duiden we aan met *modelleerstappen*. Elke stap resulteert in een *tussenproduct*. Deze tussenproducten hebben uiteraard na de eerste keren dat de cyclus wordt doorlopen nog een voorlopig, globaal en onvolledig karakter en worden in de loop van de tijd herzien, gedetailleerd en aangevuld. Er zijn vele schema’s voor de “modelleercyclus” in omloop, met elk



Figuur 1: Modelleren als cyclisch proces

een bepaalde mate van verfijning, afhankelijk van het doel waarvoor ze worden

gebruikt. Ik geef hier een mogelijk schema dat kan worden gebruikt om te kunnen onderscheiden *welke vaardigheden* van belang zijn bij het leren modelleren.¹ Dit schema is dus minder geschikt om bijvoorbeeld behulpzaam te zijn bij het bepalen van een *strategie* om een wiskundig model te construeren.

In figuur 1 zijn in de hokken de “tussenproducten” van het modelleren opgenomen; de pijlen ertussen stellen de eigenlijke modelleerstappen voor.

- In de eerste stap (*probleemanalyse*) worden de vragen die het model moet kunnen beantwoorden gespecificeerd en de daarvoor relevante aspecten geïdentificeerd.
- In de tweede stap (*schematiseren*) wordt een beredeneerde keuze gemaakt voor de belangrijkste aspecten, ze worden vertaald naar welgedefinieerde grootheden en er worden veronderstellingen gemaakt over de aard van de verbanden tussen deze grootheden.
- In de volgende stap (*vereenvoudigen en modelopzet*) wordt een eerste opzet voor een model gemaakt.
- De *implementatie* is de uitwerking van het model in conclusies die in termen van de oorspronkelijke vraagstelling geïnterpreteerd kunnen worden. In eenvoudige gevallen ligt de nadruk hierbij vooral op het *terugvertalen* van de formules en getallen die uit het model komen rollen naar een antwoord op de oorspronkelijke vraag (vooral voor beginners een verre van triviale stap). Bij gecompliceerder modellen zal het *doorrekenen* van het model de meeste moeite kosten.
- In de eerste plaats zal dan een nadere *analyse* (speciale gevallen, limietgedrag, stabiliteitsonderzoek, enz.) eventuele inconsistenties aan het licht moeten brengen. In veel gevallen zal dit al leiden tot een nadere analyse van het probleem, een andere keuze van de relevante aspecten, en zo voort.
- In de tweede plaats bevat het model in het algemeen een aantal nader te bepalen parameters. De *modeltoepassing* moet onder andere leiden tot procedures om de parameters te meten of te schatten en een opzet voor een gevoeligheidsanalyse. Ook de resultaten hiervan kunnen weer leiden tot herziening van het oorspronkelijke model.
- Tenslotte dient de *rapportage* (niet in figuur 1 opgenomen) nog als modelleerstep te worden vermeld.

4 Vaardigheden

Voor wiskundig modelleren is een aantal vaardigheden nodig. Ze worden hier nader omschreven in termen van de modelleerstappen waarbij ze van belang zijn. Bovendien wordt per vaardigheid vermeld welke vakken *vooral* bedoeld zijn voor het verwerven van die vaardigheid en wordt globaal aangegeven op welke wijze dat gebeurt.

¹In het dictaat *Modelvorming* van Battjes, Booij en Hooimeijer, dat bij het vak Wiskundig Modelleren II wordt gebruikt, wordt een iets ander schema gehanteerd.

ALGEMENE VAARDIGHEDEN

1. Plannen

Hierbij is van belang dat men kan schatten hoe moeilijk/tijdrovend de verwachte fasen in het werk zullen zijn. In verband daarmee moeten beoogde “tussenprodukten” kunnen worden gedefinieerd. Aan de hand daarvan moet steeds de planning worden bijgesteld; hoe minder ervaren modelleerder, hoe drastischer de benodigde bijstellingen in het algemeen zullen zijn. Een eerste opzet van een goede planning kan worden gemaakt op het moment dat men aan de implementatiestap toe is. De wijze waarop de rapportage tot stand komt is een belangrijk, maar vaak onderschat, onderdeel van de planning.

Planning is van toenemend belang in de rij WM1 (geen expliciete aandacht; volledig docentgestuurd), WM2 (met de docent worden tussenrapportages afgesproken), WM4 (studenten doen zelf voorstellen voor tussenrapportages aan de docent), MDOO (volledig studentgestuurd; er is een “keiharde deadline”).

2. Literatuurgebruik

Dit speelt vooral een rol in de analyse en de identificatie van de factoren. Speciaal hierbij moet ook van niet-wiskundige literatuur gebruik worden gemaakt. Bij de Implementatie zal de nadruk meer liggen op het gebruik van wiskundige literatuur. Er moeten keuzes gemaakt worden in hoeverre van bestaande (standaard-) modellen gebruik gemaakt kan worden dan wel een geheel nieuwe opzet moet worden ontwikkeld.

Bij de parameteridentificatie moeten experimenten worden ontworpen om de parameters te meten of te schatten. Evenals bij het toepassen van het model moet hierbij (ook) een beroep gedaan worden op niet-wiskundige literatuur.

Bij WM1 wordt geen gebruik gemaakt van literatuur; bij WM2 wordt de te gebruiken literatuur bij de opdracht verstrekt; bij WM4 en MDOO moeten studenten zelf op zoek naar relevante literatuur. Vóór het begin van WM4 moet instructie worden gegeven in het *zoeken* van literatuur. Voor het zinvol *gebruiken* van literatuur (hoe stel je snel vast of een artikel relevant is; hoe goed moet je alles begrijpen van wat je gebruikt, enz.) is voorzover ik weet nog geen goede instructiemethode bedacht. Het komt vooral bij WM4 en MDOO aan de orde.

3. Gegevens (data!) verzamelen en eventueel bewerken.

Gebruik van gegevensbronnen: literatuur, simulatie en experimenten. Nodig voor de parameteridentificatie, de gevoeligheidsanalyse en de modeltoepassing.

Simulatietechnieken komen in WM3 aan de orde (hoor- en werkcollege); In WM4 vooral: wat voor *soort* gegevens zijn er nodig? Keuze van de te gebruiken bronnen. Vanaf het begin al tamelijk studentgestuurd. De docent moet ervoor zorgen (via de afspraken voor de tussenrapportages) dat er aandacht aan wordt besteed en geeft zo nodig terugkoppeling.

4. In teamverband werken

Hierbij zijn twee aspecten te onderscheiden. In de eerste plaats gaat het

om de verdeling van de taak als deze te groot is voor één individu en in de tweede plaats om de inbreng van relatief specialistische kennis in een project-team.

Het eerste aspect komt voor het eerst expliciet aan de orde in WM2. Hier zal de docent uitdrukkelijk controleren of er goede afspraken worden gemaakt over de wijze waarop het werk wordt verdeeld en hoe de resultaten op elkaar worden afgestemd. In WM4 ligt het initiatief weer veel meer bij de studenten.

Het tweede aspect is een hoofdonderwerp van de MDOO. Veel studenten zullen ter voorbereiding het W&M-vak “Werken in projectteams” volgen. Bovendien wordt in de W&M-component in de MDOO ook ruimschoots aandacht besteed aan deze vaardigheid.

5. Rapporteren

Over elke modellerrstap dient in enigerlei vorm te worden gerapporteerd.

Schriftelijke rapportage is een van de belangrijkste aspecten bij WM1. Bij dit vak is de indeling in hoofdstukken van de te maken verslagen vrijwel voorgeschreven. De procedure is dat van de eerste opdracht een proefverslag wordt gemaakt dat door de docent ruimschoots van commentaar wordt voorzien, maar niet meetelt in de beoordeling. Van de (vier) volgende verslagen wordt *altijd* in eerste instantie een voorlopige versie ingeleverd. Deze wordt door de docent becommentarieerd waarna het definitieve verslag wordt gemaakt dat wordt beoordeeld. De studenten gebruiken een opmaakprogramma (*Scientific Workplace* of L^AT_EX) dat uitnodigt tot een goede structurering van het verslag.

Voor de mondelinge rapportagevaardigheden is in het derde jaar het vak “presentatie van een wiskundig onderwerp” in het curriculum opgenomen.

MODELLEER-VAARDIGHEDEN

6. Essentiële aspecten onderscheiden

Deze vaardigheid speelt vooral een rol bij het successievelijk verbeteren van het model en is in zekere zin het complement van (9). In de beginfase, waarin (voorlopige) aannames worden gemaakt en een eerste vertaling in wiskundige termen, moet een keuze worden gemaakt voor de aspecten die de belangrijkste rol spelen in het bestudeerde fenomeen. Bij de interpretatie van de modelresultaten wordt onder andere beoordeeld of inderdaad de hoofdeffecten zijn gemodelleerd.

Het bij WM2 gebruikte dictaat gaat uitvoerig in op het cyclische karakter. Zie verder onder (8).

7. Analogieën herkennen

Hierbij gaat het vooral om het herkennen van de toepasbaarheid van standaardmodellen. Nodig is daarbij een repertoire aan breed toepasbare modellen, en vooral ervaring in het gebruik ervan zodat een zo groot mogelijke flexibiliteit ontstaat in het toepassen van dergelijke modellen, onafhankelijk van de context waarin ze zijn ontwikkeld. Deze vaardigheid speelt een rol in de analysefase, en vooral bij de schematisering en de modelopzet: men moet snel kunnen herkennen of men te maken heeft met een typisch

lineair programmeringsprobleem, een diffusieprobleem, een besturingsprobleem, een optimalisatieprobleem en dergelijke.

Het vak WM3 is onder andere bedoeld als kennismaking met de belangrijkste standaardmodellen in de vorm van hoorcolleges en oefeningen. In het bijzonder zullen studenten uit de mathematisch besliskundige en financieel wiskundige richtingen een introductie krijgen in de voornaamste fysisch technische modellen en andersom. Daarnaast komen natuurlijk ook, eventueel voorbeeldsgewijs, allerlei modellen in verschillende theorievakken aan de orde — en er is dus enige overlap met vaardigheid (14). In de theorievakken zal echter de nadruk vooral liggen op de wiskundige achtergrond, terwijl WM3 zich vooral richt op de praktische aspecten.

Daarnaast wordt, onder andere in WM1, de studenten gevraagd na te gaan in hoeverre het door hen ontwikkelde model generaliseerbaar is. Dit gebeurt via de opdracht om situaties te bedenken waarin het model, eventueel na enige aanpassing, ook toepasbaar is. Tot nu toe verloopt dit nog niet erg bevredigend en er wordt gezocht naar een goede manier om de studenten hierin adequaat te begeleiden.

8. Afbakenen van de probleemstelling.

Cruciaal hierbij is het formuleren van de specificaties voor het te ontwikkelen model: welke vragen moeten met het model kunnen worden beantwoord? Deze vaardigheid speelt vooral een rol in de begin- en eindfasen van het modelleerproces (denk echter aan het cyclische karakter ervan!). Bijzondere aandacht vereist de wijze waarop de uiteindelijke probleemafbakening in de rapportage wordt verantwoord.

In het bij WM2 gebruikte dictaat is de modelleercyclus een van de hoofdonderwerpen (er wordt ook op getoetst). In het practicumgedeelte WM2 begeleidt de docent de brainstormsessie waar de eerste globale probleemafbakening aan de orde komt. In WM4 speelt de docent hooguit nog een controlerende rol en in MDOO begeleidt de docent waar nodig in de onderhandelingen van de projectgroep met de opdrachtgever.

9. Detaillering aanbrenge.

Dit is typisch een vaardigheid die samenhangt met het cyclische verloop van het modelleerproces: bij elke cyclus moet worden beslist of de mate van detaillering adequaat is. In een beginfase zal veelal uitdrukkelijk worden gekozen voor een te geringe mate van detaillering. Bij de interpretatie van de modelresultaten wordt onder andere beoordeeld of verdere verfijning nodig is. Zie ook (6).

Een van de belangrijkste thema's in het bij WM2 gebruikte dictaat is het in overeenstemming brengen van de mate van detaillering met de vragen die met het model moeten kunnen worden beantwoord. In het practicumgedeelte van WM2 zal de docent de studenten voortdurend moeten helpen herinneren aan het doel van het te ontwikkelen model; studenten hebben in dit stadium een sterke neiging zich meer te laten leiden door wat ze *kunnen* modelleren dan door wat ze *moeten* modelleren. Bij WM4 mag de docent er zeker nog niet van uit gaan dat de studenten op dit punt al "volleerd" zijn.

10. Grenzen inzien

Het betreft hier inzicht in het geldigheidsdomein, de betrouwbaarheid, de toepasbaarheid en de beperkingen van het ontwikkelde model. Deze vaardigheid is van belang bij het maken van de aannames (schematiseren, vereenvoudigen en modelopzet) waarbij de verwachte consequenties voor de grenzen van het model een belangrijke rol behoren te spelen. Anderzijds dienen ook de resultaten van een gevoeligheidsanalyse en de parameteridentificatie geïnterpreteerd te worden in termen van de grenzen van het model. Een kritische bespreking van de modelgrenzen vormt een belangrijk onderdeel van de rapportage (5).

Vooraf in WM4 wordt veel aandacht besteed aan deze vaardigheid. Bij de bespreking van de tussenrapportages zal de begeleider nogal wat nadruk leggen op de consequenties van gemaakte of voorgestelde keuzes. De vaardigheid die dan wordt verkregen zal een cruciale rol spelen bij de onderhandelingen met de opdrachtgever in de MDOO.

In het vak WM3 komen gevoeligheidsanalyse en parameteridentificatie aan de orde. Overigens is bijvoorbeeld de doorwerking van meetonnauwkeurigheden in de betrouwbaarheid van met een model gedane voorspellingen al een onderwerp van het natuurkundepracticum in het tweede jaar.

11. Zoeken naar alternatieven

Deze vaardigheid speelt bij vrijwel elke modelleerstep een rol. Men zal zich voortdurend rekenschap moeten geven of de gekozen aanpak geen doodlopend spoor is en steeds alternatieven achter de hand moeten hebben waartegen de gekozen aanpak kan worden afgewogen. Anderzijds kan men door mislukte pogingen ook op het idee voor veelbelovende alternatieven worden gebracht.

In de opdrachten van WM2 is de vraagstelling tamelijk breed. Daar zal in de beginfase, onder intensieve begeleiding van de docent, uitvoerige aandacht worden besteed aan het genereren van alternatieve benaderingen van het probleem (zie ook 8). Meestal zal dat leiden tot de keuze van een verschillende aanpak door verschillende groepjes studenten. Daarnaast zal de docent, dankzij de frequente tussenrapportages, in een vroeg stadium dreigend vastlopen kunnen signaleren en zo nodig de weg wijzen naar alternatieven.

Bij WM4 ligt het ongeveer hetzelfde, maar daarbij zal het initiatief veel sterker bij de studenten moeten liggen. De docent moet hier wèl alert blijven en studenten zo nodig confronteren met de noodzaak een drastisch alternatief voor een vruchteloze aanpak te kiezen.

12. Wiskundige resultaten kunnen interpreteren

Het “terugvertalen” van wiskundige resultaten in termen van de oorspronkelijke probleemstelling vindt plaats bij de implementatie, de modeltoepassing en de modelanalyse. De rapportage dient zodanig te zijn dat de conclusies ook begrepen kunnen worden door iemand die zich niet in de wiskundige achtergronden heeft verdiept.

Zeker voor beginnende modelleerders is dit een verre van triviale vaardigheid. Eerstejaarsstudenten hebben nog een sterke neiging om te stoppen zodra ze een getal of een formule hebben gevonden. In WM1 wordt daarom

veel aandacht aan dit aspect besteed. Een groot deel van het commentaar dat de studenten op de eerste versie van hun verslagen krijgen betreft dit punt. Zie verder (5).

WISKUNDIGE VAARDIGHEDEN

13. Grootheden definiëren

Vertalen van de onderscheiden aspecten in grootheden (variabelen); aandacht voor het domein; schaling en dimensieanalyse.

De eerste twee (vertalen en domein) komen vooral in WM1 aan de orde: de docent is meestal aanwezig als de studenten met deze zaken worstelen. De opdrachten worden zó gekozen dat te weinig aandacht voor deze zaken leidt tot moeilijkheden. Schaling en dimensieanalyse komen aan de orde in WM3 (met oefeningen en uiteraard terugkoppeling op de uitwerkingen).

14. Kennis integreren uit verschillende vakken en operationeel maken van wiskundekennis

Deze vaardigheid is in elke modelleerstep van belang. Bij het flexibel gebruik maken van (uit andere vakken bekende) standaardmodellen is hierover bij (7) al iets opgemerkt. Daarnaast moeten allerlei wiskundige technieken gebruikt kunnen worden in andere situaties dan oefen- of tentamenvraagstukken. Dit is het geval bij de implementatiestap, het consistentieonderzoek en de parameteridentificatie.

Van WM1 tot de MDOO speelt deze vaardigheid een toenemende rol. Bij de keuze en de formulering van de opdrachten in WM1, WM2 en WM4 wordt (in afnemende mate) rekening gehouden met de op dat moment bij de deelnemers aanwezige voorkennis. Bij de MDOO is dat niet meer het geval: ontbrekende voorkennis zal men zich grotendeels zelfstandig eigen moeten maken. Iedere TW-deelnemer aan de MDOO kan wèl een beroep doen op de hulp van een TW-docent.

5 Wiskundig Modelleren 1

<http://www.math.utwente.nl/~ommeren/150526>

In het eerstejaarspracticum ligt de nadruk op het definiëren van grootheden (13)², op het interpreteren van de resultaten (12) en op het schriftelijk rapporteren (5). Het gebruiken van de voorkennis (14) speelt ook een (ondergeschikte) rol.

5.1 Globale opzet

Studenten werken in tweetallen aan vijf opdrachten, verspreid over het hele jaar. De opdrachten worden een paar dagen vóór de practicumzitting via de postvakjes verspreid (of op het internet gezet). De eerste opdracht is een “proefopdracht” en telt niet mee in de beoordeling.

²De nummers verwijzen naar de beschrijving van de vaardigheden in §4.

5.2 Schriftelijk materiaal

- De opdrachtschrijvingen van hooguit één pagina elk;
- Een korte beschrijving van de eisen waaraan het verslag moet voldoen;
- Een handleiding voor *Scientific Workplace* (SWP).
zie: <http://www.math.utwente.nl/~avdmeer/swp30handl.pdf>

5.3 Groepsactiviteiten

In principe is er géén klassikale instructie; de studenten werken vanaf het begin in tweetallen aan de opdracht; de docent helpt deze tweetallen als ze er om vragen. Voor het inventariseren van relevante aspecten en het vertalen ervan in grootheden (en verbanden tussen de grootheden) kan desgewenst een groepsdiscussie (brainstorm) worden gebruikt. *Begin* daar niet mee; laat de studenten eerst enige tijd in tweetallen nadenken en gebruik zo'n groeps gesprek bijvoorbeeld om de resultaten te verzamelen.

Voor een practicum is steeds een hele middag op het rooster gereserveerd. De docent hoeft daarbij niet steeds aanwezig te zijn. Hij (zij) kan zich bijvoorbeeld de tweede helft van de middag terugtrekken, maar wel bereikbaar blijven voor eventuele vragen en aan het eind van de middag terugkomen om vragen te beantwoorden. Benadruk dat iedereen geacht wordt de hele middag te werken.

Aandachtspunten. De studenten willen het liefst zo snel mogelijk aan het rekenen. Let er daarom tijdens de groepsbijeenkomst bij elk tweetal vooral op dat voldoende aandacht wordt geschonken aan de volgende aspecten.

- Een *grootheid* is een variabele met een *dimensie*. Houd in de gaten dat bij de definitie van de grootheden óók de dimensie wordt vermeld. Dit geldt ook voor evenredigheidsconstanten e. d.
- Een goede test voor veronderstelde verbanden tussen grootheden is dat ze ook dimensioneel moeten kloppen. Zo moet een exponent of een logaritme bijvoorbeeld dimensieloos zijn. Zorg dat de studenten er een gewoonte van maken om dat altijd te controleren.
- Studenten hebben de neiging om de te gebruiken wiskundekennis te beperken tot de VWO-stof. Zorg er voor dat tenminste de resultaten van berekeningen worden geformuleerd in termen die ze hier geleerd (zouden moeten) hebben. Bijvoorbeeld: De oplossingsverzameling van een stelsel lineaire vergelijkingen moet (ook) als lineaire variëteit worden gegeven.
- Aan het interpreteren van de resultaten (12) moet ruime aandacht worden besteed. Bij de eerste (proef-)opdracht moeten ze aan het eind van de practicummiddag al zo ver zijn. Zorg er voor dat je elk tweetal hierover nog even aan de tand voelt voordat ze naar huis gaan.
- Ga ook eens in de computerzaal kijken als ze met Maple bezig zijn. Misschien zijn er wel studenten die daarbij wat hulp nodig hebben.

Na (of tijdens) de eerste practicumbijeenkomst is de computerzaal A106 gereserveerd om een begin te maken met het eerste verslag. De docenten zijn dan aanwezig om te helpen met SWP.

Aandachtspunten bij “SWP-hulp”.

- Degenen die veel met *Word* of een andere tekstverwerker hebben gewerkt hebben een sterke neiging zich veel te veel met de lay-out te bemoeien. Leg geduldig uit dat SWP geen tekstverwerker is maar een *opmaakprogramma*; voor tussenkopjes, alinea-indeling, lijstjes, tabellen e.d. moet men gebruik leren maken van de normale stijl-elementen van de gekozen opmaakstijl.
- Wen de studenten er aan dat ze alle formules van meer dan een paar tekens op een aparte regel te zetten, en ze te nummeren als er naar verwezen wordt.

5.4 Individuele begeleiding

5.4.1 Proefopdracht

Bij de eerste (proef-)opdracht zal de *individuele* begeleiding zich in het algemeen beperken tot het becommentariëren van het verslag; het is niet te verwachten dat studenten bij de wiskundige uitwerking van het model op grote problemen stuiten.

Het ingeleverde proefverslag moet ruimschoots van commentaar worden voorzien; van dit commentaar moeten de studenten leren hoe ze het in het vervolg beter kunnen doen.

Aandachtspunten bij het becommentariëren van het proefverslag.

- Let op de hoofdstukindeling. Studenten zijn geneigd om het verslag klakkeloos precies volgens de in de opdracht gestelde vragen in te delen. Vaak luiden de hoofdstuktitels zelfs: “Vraag 1”, “Vraag 2”, enz. Herinner de auteurs in je commentaar er aan dat je aan de titel van een hoofdstuk moet kunnen opmaken waar het over gaat. Geef voor een enkel hoofdstuk een suggestie voor een betere titel. Geef aan welke hoofdstukken beter hadden kunnen worden samengevoegd of gesplitst.
- Weergave van berekeningen, Maple-sessies e.d. Geef duidelijk aan wat beter in een appendix had kunnen worden opgenomen of juist niet. Vuistregel: Het verhaal moet te volgen blijven als je niet naar de bijlagen kijkt. (Plaatjes vormen hierop een uitzondering: deze mogen op aparte bladzijden worden toegevoegd.)
- Let er op dat de formulering van het model *compleet* is, dus helemaal in wiskundige termen wordt gepresenteerd.
- Er “moet” van de kennis van Calculus I en Lineaire Algebra gebruik gemaakt worden, zelfs als het in principe ook met VWO-kennis zou kunnen.
- Schenk veel aandacht aan de conclusies: de terugvertaling van de wiskundige resultaten in termen van de oorspronkelijke probleemstelling. Vuistregel: De conclusies moeten te begrijpen zijn door iemand die “niets” van wiskunde weet.

5.4.2 Overige opdrachten

Het vak WM1 is *niet* in de eerste plaats bedoeld om te leren een verantwoorde keus te maken uit verschillende mogelijke modeltypen; daarvoor is vooral WM2 bedoeld. Dat betekent dat de opdrachten vrijwel altijd (tenminste vanuit het standpunt van de docent) tamelijk rechttoe-rechtaan in de richting van één ondubbelzinnige oplossing leiden. Studenten die een andere weg proberen te bewandelen—bijvoorbeeld een discreet model proberen waar een continu model is bedoeld—moeten daar in een vroeg stadium van af gebracht worden. Probeer ze zelf de nadelen van de gekozen oplossing en een beter alternatief te laten ontdekken.

Het is nuttig om buiten de verroosterde tijden nog iets voor de individuele begeleiding te organiseren, bijvoorbeeld in de vorm van een spreekuur. Eventueel kan elk tweetal uitdrukkelijk worden uitgenodigd om de resultaten met de docent te bespreken vóórdat het verslag wordt ingeleverd. De interpretatie van de resultaten in termen van de oorspronkelijke probleemstelling zal dan vrijwel altijd een van de belangrijkste gespreksonderwerpen zijn.

Zoals gezegd (zie §4, punt 7) is WM1 mede bedoeld om een eerste aanzet te geven de studenten te leren de generaliseerbaarheid van hun model te onderzoeken. In dit practicum gebeurt dit in de vorm van de vraag om één of meer situaties te bedenken waarvoor het model, eventueel na enige aanpassing, ook toepasbaar is. Echter, kost het al de nodige moeite de studenten zover te krijgen om niet direct te stoppen als het wiskundig geformuleerde probleem is opgelost, tot een dergelijke evaluatie van het model zijn ze bijna helemaal niet meer te bewegen. Een “harde eis” die vroeger wel eens gesteld is resulteerde meestal in uitermate oppervlakkige en vaak “lollige” slotparagraaf in het verslag. Het is goed om hier t’och bij de individuele begeleiding aandacht aan te besteden. Wijs de studenten er op dat ze niet kunnen volstaan met een al te globale impressionistische beschrijving van een analoge situatie, maar dat het ook nodig is een 1 – 1-relatie tussen de grootheden in het oorspronkelijke probleem en de grootheden in het analoge probleem te geven. Als dat niet zonder meer mogelijk is moet worden aangegeven in welke richting het model aangepast of uitgebreid zou moeten worden. Help ze hierbij.

5.5 Beoordeling

Het verslag moet tenminste bevatten:

- Een precieze formulering van het probleem: welke vragen moeten met het model beantwoord kunnen worden? Welke aspecten worden meegenomen, welke niet en waarom?
- Een lijst van gebruikte grootheden (met grenzen en dimensie);
- De formulering van het model in wiskundige vorm, dat wil zeggen als probleem dat geheel los van de context kan worden opgelost;
- De oplossing in wiskundige vorm, dat wil zeggen in de terminologie van de wiskundevakken die tot op dat moment aan de orde zijn geweest;
- Conclusies, vertaling van de oplossing in termen van de oorspronkelijke probleemstelling.

Als er verschillende docenten zijn moeten er duidelijke afspraken zijn voor wat minimaal vereist is voor een voldoende beoordeling. Bij opdrachten die al eens eerder bij WM1 zijn gegeven kan in de vorm van een door de coördinator vervaardigde “modeluitwerking”. Bij *nieuwe* opdrachten (waar dus nog geen ervaring mee is opgedaan) kunnen deze afspraken tot stand komen nadat elke docent de ingeleverde verslagen een keer snel heeft doorgenomen. Op grond van het globale beeld dat ieder dan heeft van de kwaliteit van de verslagen kunnen dan in onderling overleg de criteria worden vastgesteld.

Bij een onvoldoende beoordeling wordt er altijd (minstens) één keer gelegenheid gegeven om het verslag te verbeteren en/of aan te vullen. Geef op een apart briefje aan wat er van de nieuwe versie wordt verwacht (bewaars een kopie van dit briefje; dat scheelt nakijktijd bij de nieuwe versie). Misschien is het zelfs te overwegen de eerste versie van het verslag standaard als *voorlopige versie* te beschouwen. De docent levert hierop (schriftelijk) commentaar—dus nog geen beoordeling—dat door de studenten wordt verwerkt tot een *definitief verslag*.

Houd de hand aan de uiterste inleverdatum voor het verslag. Deze mag — behoudens gevallen van aantoonbare overmacht, zoals ziekte e.d.— onder geen beding worden overschreden. Omdat iedereen altijd alles tot het laatste moment uitstelt (en deze uitdrukking is niet als ironische overdrijving bedoeld) worden de inleverdata vastgesteld om er voor te zorgen dat, óók wanneer er nog een aanvulling moet worden gemaakt, er géén WM1-activiteiten meer hoeven te zijn vlak voor en tijdens de tentamenperiodes.

6 Wiskundig Modelleren 2

Het tweedejaarspracticum is vooral gericht op het leren *opzetten* van wiskundige modellen. Van de vaardigheden in §4 komen daarom vooral, en in samenhang, aan de orde: Het afbakenen van de probleemstelling (8), het kiezen van de juiste mate van detaillering (9), het onderscheiden van essentiële aspecten (6) en het overwegen van alternatieven (11).

In het eerstejaarspracticum gaat het in de eerste plaats om *interpreteren en rapporteren*, in WM2 staat de *modelopzet* centraal. Het *analyseren* van het model, de implementatie en de modeltoepassing spelen hier een ondergeschikte rol; deze activiteiten komen vooral in WM4 aan de orde.

6.1 Globale opzet

Er is een inleidend hoorcollege waarbij, aan de hand van een of twee voorbeelden (bij voorkeur afkomstig uit het vak WM1), de verschillende stappen in de modelleercyclus worden toegelicht. Daarna werken studenten in viertallen aan een modelleeropdracht. Er moet naar worden gestreefd dat de opdracht interessant is voor zowel MBS/FWS- als FTS-studenten; de viertallen bestaan in principe uit studenten van verschillende stromen. De opdracht wordt afgesloten met een schriftelijk verslag en een openbare voordracht.³

³Gelijktijdig met WM2 volgen de studenten het vak *Presenteren van een wiskundig onderwerp*.

6.2 Schriftelijk materiaal

Er wordt gebruik gemaakt van de syllabus *Modelvorming* van J.A. Battjes, N. Booij en M.A. Hooimeijer (Collegehandleiding CTow 1090 van de faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen van de TUD). De opdrachten beslaan hooguit twee pagina's en bevatten zo nodig verwijzingen naar relevante literatuur.

6.3 Het Hoorcollege

De bedoeling van het hoorcollege is vooral om te reflecteren op hetgeen in het vak WM1 is geleerd. Hierdoor moet een basis worden gegeven voor het leren modelleren in gecompliceerder situatie. Hierbij zullen twee aspecten centraal staan:

- Het formuleren van de vragen die met het model moeten kunnen worden beantwoord en het inzicht dat verschillende (typen) vragen tot verschillende (typen) modellen leiden;
- De fasen die in het modelleerproces onderscheiden kunnen worden.

Het is niet de bedoeling dat er een uitputtende theoretische behandeling van deze zaken wordt gegeven. Het college moet veeleer dienen als een inleiding op de zelfstandige bestudering van het dictaat *Modelvorming* als achtergrond en hulpmiddel bij de modelleeropdracht.

De *omvang* van het hoorcollege ligt op dit moment nog niet vast. Er is tot nu toe nogal geëxperimenteerd en de resultaten zijn vooralsnog niet geheel bevredigend.

6.4 De opdracht

6.4.1 Inhoud

De ideale opdracht voor WM2 bestaat waarschijnlijk niet, maar zou de volgende kenmerken moeten hebben:

- Er moeten zowel besliskundige als mathematisch fysische aspecten in zitten;
- Er moeten wezenlijk verschillende typen modellen zinvol zijn;
- Een substantieel deel van de (voor alle studenten gemeenschappelijke) wiskundekennis uit de eerste vier trimesters moet op een niet-triviale manier toegepast kunnen worden;
- Er moeten in ongeveer 9 weken interessante resultaten behaald kunnen worden.

De opdracht is *niet* bedoeld als representatieve kennismaking met de gekozen MB-, FW- of FT-stroom; uiteraard mag wèl duidelijk worden dat in de verschillende stromen het ene modeltype méér voor de hand ligt dan het andere.

Eventueel noodzakelijke literatuur(verwijzingen) is bij de opdrachtoomschrijving opgenomen.

6.4.2 Begeleiding

Aan de opdracht wordt in de tweede week van het trimester begonnen. (Bijna) elke week is een heel dagdeel verroosterd. Behalve de eerste keer —waar de docent wellicht een korte toelichting op de probleemstelling geeft en een deel van de tijd besteed kan worden aan een plenaire brainstormsessie— werken de studenten meestal in de afzonderlijke projectgroepen. In principe rapporteert elke projectgroep elke verroosterde dag mondeling bij de docent over hun vorderingen. De docent is verder (minstens een deel van) de ochtend beschikbaar om op verzoek van de studenten vragen te beantwoorden.

Het dictaat *Modelvorming* moet tijdens het werken aan de opdracht worden bestudeerd, en de inhoud ervan moet worden gerelateerd aan het projectwerk. Om dit te controleren kan per week worden gevraagd op een aantal vragen van het soort dat in dit dictaat wordt gesteld te beantwoorden voor het model waar men mee bezig is.

Projectplan. Na drie weken moet een *projectplan* worden ingeleverd. Hierin moet verslag worden gedaan van de probleemanalyse (= becommentarieerde notulen van de besprekingen) en er moet een globale opzet van het model worden gepresenteerd. De terminologie uit het dictaat *Modelvorming* moet hierbij worden gebruikt. Dit projectplan wordt niet beoordeeld maar wel uitvoerig becommentarieerd door de docent.

Tussenverslag. Na vijf weken moet een tussenverslag worden ingeleverd dat in feite al een *concept-eindverslag* moet zijn, dus aan alle criteria van een eindverslag moet voldoen. Het tijdstip hiervoor is zo vroeg gekozen om de studenten in de gelegenheid te stellen om in dit stadium nog ingrijpende wijzigingen aan te brengen of zelfs nog drastische alternatieven te overwegen. Ook het tussenverslag wordt niet beoordeeld, maar uitvoerig met de docent besproken.

Eindverslag. Dit moet uiterlijk op de dag van de presentaties worden ingeleverd. Er is een richtlijn voor het verslag (zie bijlage; kop moet worden aangepast⁴)

6.4.3 De voordracht

Elke projectgroep houdt op de laatste middag een voordracht van ongeveer een kwartier. Overleg goed met de groepjes welke apparatuur ze daarbij nodig hebben en wie dat regelt. Deze voordrachten zijn openbaar; zorg er voor dat ze aangekondigd worden in de TW-activiteitenagenda en nodig bijvoorbeeld de leden van de Taakgroep Modelleronderwijs uit.

6.4.4 De beoordeling

Beoordeel niet alleen het verslag maar ook de manier waarop gewerkt is. Globaal kan gedacht worden aan de volgende gewichten:

- Motivering van het gekozen model 20%
- Uitleg van het model; wiskundige verantwoording 15%
- Interpretatie van de modelresultaten 15%

⁴maar ik weet niet wie het origineel heeft.

- Discussie en voorstellen voor verbetering10%
- Reflectie op het modelleerproces; adequate verwerking van
tussenresultaten en kritiek20%
- Verzorging van het eindverslag10%
- Voordracht10%

7 Wiskundig Modelleren 3

Dit vak wordt gegeven in het tweede trimester van het derde jaar als —in tegenstelling tot de andere modelleervakken— een hoor- en bijbehorend werkcollege. De bedoeling is studenten kennis te laten maken met diverse *technieken* die bruikbaar zijn bij het wiskundig modelleren en met een aantal *standaardmodellen* uit diverse vakgebieden. In het werkcollege doen de studenten enige vaardigheid op in het toepassen van deze technieken en standaardmodellen.

Van de vaardigheden in §4 komen aan de orde: het definiëren van grootheden (13), analogieën herkennen (7) en kennis uit verschillende vakgebieden integreren (14).

7.1 Hoorcollege

In tien achtereenvolgende hoorcolleges komen achtereenvolgens aan de orde:

1. Data-analyse;
2. Dimensieanalyse en scaling;
3. Behoudswetten en lienearisatie;
4. Modelleren met in- en uitgangen;
5. Toevalsprocessen;
6. Modelklassen en modulair modelleren;
7. Evolutievergelijkingen;
8. Tijdreeksen;
9. Modelvereenvoudiging en modelbenadering;
10. Multicriteria analyse en local search methoden.

Het college vormt dus een bonte kaleidoscoop van zeer verschillende onderwerpen. Het gaat hierbij om min of meer oppervlakkige inleidingen, waarbij de nadruk ligt op “waar het voor dient” en “hoe je het doet”, en niet op de wiskundige achtergrond.

7.2 Werkcollege

In de werkcolleges maken de studenten (desgewenst in tweetallen) opgaven over de stof van het hoorcollege. De opgaven hebben het karakter van *vraagstukken*. Het is niet de bedoeling dat hier *modelleeropdrachten* worden gegeven; het gaat er in dit vak slechts om dat de studenten enigszins met de op het hoorcollege gepresenteerde technieken en modellen leren werken.

De werkcollegeopgaven worden (uiterlijk bij het volgende hoorcollege) ingeleverd. Ze worden met een cijfer beoordeeld; het eindcijfer WM3 is het gemiddelde van de tien deelbeoordelingen.

7.3 Studiemateriaal

Er is een dictaat. Hierin zijn ook de werkcollegeopgaven opgenomen.

8 Wiskundig Modelleren 4

Derde trimester van het derde jaar. In WM4 oefenen studenten in het opstellen en toepassen van een wiskundig model voor een complex probleem. Naast de opzet van het model moet hier ook vooral aandacht worden besteed aan modelimplementatie, -verificatie en -toepassing.

Van de vaardigheden in §4 komen aan de orde: een planning kunnen maken en zich er aan houden (1), literatuur raadplegen en gebuiken (2), gegevens verzamelen (3), kennis van verschillende vakgebieden integreren (14), resultaten interpreteren (12), grenzen inzien (10) en in teamverband werken (4).

8.1 Teamwerk

Eén van de belangrijkste verschillen van WM4 in vergelijking met WM1 en WM2 is dat de taak zó omvangrijk is dat het werk in deeltaken gesplitst moet worden. Dat betekent dat de deeltaken geformuleerd en verdeeld moeten worden; dat de teamleden tegelijk op elkaars werk moeten kunnen vertrouwen en het kritisch moeten beoordelen; dat de deeltaken goed op elkaar afgestemd moeten zijn; en dat de planning (en de tussentijdse bijstelling ervan) een nóg crucialer rol speelt dan bij WM2.

8.2 Studiemateriaal

Er is een handleiding voor *Werken in Projectteams* dat vooral aandacht besteedt aan de bovengenoemde aspecten. Deze handleiding bevat tevens een aantal *Aandachtspunten voor de begeleider*.

(wordt vervolgd)