РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Санкт-Петербургский экономико-математический институт

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

VII

Нестор-История
Санкт-Петербург
2009

УДК 330.4
ББК 65
Э 40

Под редакцией
А. А. Корбута, **С. Л. Печерского** и **Л. А. Руховца**.

Печатается по решению Ученого совета СПб ЭМИ РАН

Э 40 **Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. VII.** Сборник трудов Санкт-Петербургского экономико-математического института РАН. СПб. : Нестор-История, 2009. — 332 с.

ISBN 9785-98187-269-3

ISBN 9785-98187-269-3
9 785981 872693

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание седьмого сборника работ сотрудников СПб ЭМИ РАН составляют оригинальные статьи, подготовленные по результатам исследований 2008 года.

Традиционно в сборнике четыре раздела, соответствующих основным направлениям исследований Института:

— теоретическая экономика;

— математическое моделирование в задачах городской и региональной экономики;

— теория и методы информационных технологий социально-экономических и гуманитарных исследований;

— теория и методы регулирования и прогнозирования воздействия экономической деятельности на природную среду и экономика природопользования.

В первом разделе «Теоретическая экономика», самом большом по числу работ, представлены работы по ставшей приоритетной в СПб ЭМИ РАН тематике построения и исследования моделей экономического роста. В других работах продолжены исследования кооперативных игр и возможностей их применения.

Работы второго раздела сборника по математическому моделированию в задачах городской и региональной экономики посвящены проблемам городской недвижимости, а также развитию компьютерной системы по охране исторических городских панорам. В этом разделе рассматривается также важная для нашей страны проблема старения населения.

В представленных в третьем разделе работах продолжены исследования по созданию алгоритмов автоматического анализа текстов (деловой «прозы») на естественном (русском) языке, а также методов их компьютерной реализации.

Последний раздел, посвященный моделированию воздействия экономической деятельности на природную среду, содержит две работы.

КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ С ОГРАНИЧЕННОЙ КООПЕРАЦИЕЙ И ПРИЛОЖЕНИЕ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ВОДНЫХ РЕСУРСОВ РЕКИ

А.Б. Хмельницкая

Рассматривается новая модель кооперативной игры с трансферабельными полезностями, наделенной одновременно двумя структурами — кооалиционной структурой априори заданных союзов и двухуровневой кооперативной структурой, заданной посредством набора коммуникационных графов. Подход к построению решения идейно близок как к Майерсону (1977), так и к Ауману и Дрезе (1974): он основан на идеях компонентной эффективности и том или ином свойстве удаления ребра связи из коммуникацинного графа, и при этом априорные союзы рассматриваюся как самостоятельные единицы. Более того, предлагаемый подход включает в себя идею Оуэна (1977) о свойстве промежуточной игры между априорными союзами. Значения игр, определяемые аксиоматически, имеют явное формульное представление и во многих случаях их численное значение довольно легко вычисляется. Практичекое применение полученных результатов рассматривается на примере распределения водных ресурсов реки между множественными пользователями, расположенными вдоль ее русла.

1. Введение

Начало изучению кооперативных игр с трансферабельными полезностями (ТП игр) с априори заданными коалиционными структурами было положено работой Аумана и Дрезе [2] и затем Оуэна [11]. Позднее подход Оуэна был развит Винтером [15] на игры с уровневыми структурами. Иная модель игры с ограниченной кооперацией, задаваемой посредством коммуникационного графа, предложена Майерсоном [10]. В последние три десятилетия появилось достаточное число публикаций, посвященных рассмотрению ТП игр с ограниченной кооперацией, но в основном это работы в рамках либо одной, либо другой модели. В этой связи интересна работа Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо и Каррераса [14], в которой авторы предлагают обобщение обоих значений — Оуэна и Майерсона, в применении к комбинированной модели ТП игры, наделенной двумя независимыми структурами — структурой априорных союзов и кооперативной структурой коммуникационного графа.

В настоящей работе рассматриваются ТП игры, наделенные обеими (коалиционной и кооперативной) структурами, так называемые графические игры с коалиционной структурой. Но в отличие от [14], в нашем случае кооперативная структура является двухуровневой и существенно зависит от заданной коалиционной структуры. Предполагается, что кооперация (посредством попарных переговоров между участниками) возможна только либо между целыми коалициями заданной коалиционной структуры (иными словами, априорными союзами), либо среди отдельных игроков внутри априорных союзов. Никакого общения и, следовательно, никакой кооперации не допускается между отдельными игроками, принадлежащими разным элементам коалиционной структуры. Этот подход позволяет моделировать различные ситуации на сетях, в частности, задачи телекоммуникации, распределение товаров между разными городами (странами) по сети шоссейных дорог между городами и сети местных дорог внутри городов, или распределения водных ресурсов реки, протекающей по территории нескольких стран, между множественными пользователями, и т.п. Двухуровневая кооперативная структура задается посредством графов двух типов, где первые определяют связи между априорными союзами коалиционной структуры, а вторые — связи между отдельными игроками внутри априорных союзов. В дальнейшем мы будем рассматривать кооперативные структуры, представленные комбинациями графов различной структры — общими неориентированными графами, графами без циклов, линейными графами с линейно упорядоченными игроками, ориентированными графами со структурой дерева с корнем и дерева стока.

Основной целью данной работы является теоретическое обоснование решений, отражающих процедуру двухэтапного распределения. Предполагается, что вначале априорные союзы договариваются о своих полных долях союзам в результате переговоров на верхнем уровне, основанных только на суммарных интересах участников любого априорного союза, при которых ничьи личные интересы во внимание не принимаются. Затем посредством переговоров внутри априорных союзов, основанных теперь уже только на личных интересах отдельных игроков, полные доли априорных союзов распределяюся среди их участников. Предлагаемый подход к построению решения близок к обоим, Майерсона [10] и Аумана-Дрезе [2]: он основан на идее компонентной эффективности и том или ином свойстве удаления ребра из графа, и, кроме того, он рассматривает априорные союзы как автономные образования. Более того, чтобы связать оба коммуникационных уровня, мы также инкорпорируем свойство промежуточной игры Оуэна [11]. Предлагаемая модель с одной стороны является гибридом моделей Майерсона и Аумана-Дрезе, а с другой получена под сильным влиянием работ Бринка, Лаана и Васильева [4] о решениях для игр с линейными коммуникационными графами, Херингса, Лаана и Тальмана [7] о решении усредненного дерева для игр с неориентированным графом без циклов, и Сликкера [13] об аксиоматизации позиционного значения [9], [3]. Единый подход к целому ряду компонентно эффективных значений для игр с кооперативной структурой, или в иных терминах игр с графической структурой, позволяет в единых рамках рассматривать различные комбинации известных решений для игр с графической структурой сначала на уровне целых априорных союзов, а затем на уровне отдельных игроков внутри союзов. Рассмотрение различных решений, а не только комбинаций из решений Майерсона, не только расширяет понятие решения для предложенной модели графической игры с коалиционной структурой, но и во многих случаях, в зависимости от рассматриваемой графической структуры, позволяет выбрать решения, наиболее эффективные в вычислительном плане. Кроме того, это также открывает практическое применение полученных результатов к решению задачи распределения воды реки между множественными пользователями.

Струкутура работы следующая. Основные определения и обозначения приводятся в разделе 2. Раздел 3 посвящен определению графической игры с коалиционной структурой. В разделе 4 приводится единый подход к ряду известных компонентно эффективных значений для игр с кооперативной структурой. Раздел 5 посвящен аксиоматическому определению значений для графических игр с коалиционной структурой, приводится их явное формульное представление, исследуется стабильность и распределение дивидендов. В разделе 6 рассматривается обобщение модели на случай графических игр с уровневой структурой. В разделе 7 обсуждается применение полученных результатов к распределению воды реки между множественными пользователями.

2. Основные понятия и обозначения

Игры с трансферабельными полезностями

Под *кооперативной игрой с трансферабельными полезностями* (*ТП игрой*) понимается пара $\langle N,\nu\rangle$, где $N=\{1,\dots,n\}$ конечное множество $n\geqslant 2$ игроков, а $\nu:2^N\to\Re$ *характеристическая функция игры*, определенная на множестве всех подмножеств из N и удовлетворяющая условию $\nu(\varnothing)=0$. Подмножество $S\subseteq N$ и вещественное число $\nu(S)$ называются соответственно *коалицией* и *значением*, или *стоимостью* этой коалиции. Множество всех игр с фиксированным множеством игроков N обозначается посредством G_N. В дальнейшем для упрощения обозначений и если это не приводит к двусмысленности, игру $\langle N,\nu\rangle$ будем обозначать просто через ν. Также будем пользоваться стандартными обозначениями $x(S)=\Sigma_{i\in S}x_i$ и $x_S=\{x_i\}_{i\in S}$ для всех $\xi\in\Re^n$, $S\subseteq N$. *Значением игры* называется оператор $\xi:G_N\to\Re^n$, приписывающий каждой игре $\nu\in G_N$ вектор платежей $\xi(\nu)\in\Re^n$, где вещественное число $\xi_i(\nu)$ определяет *платеж* игроку i в игре ν. Под *подигрой* игры ν с множеством игроков $T\subseteq N$, $T\neq\varnothing$, понимается игра $\nu|_T$, определяемая как $\nu|_T(S)=\nu(S)$ для всех $S\subseteq T$. Игра ν является *супераддитивной*, если для всех S, $T\subseteq N$ таких что $S\cap T=\varnothing$, выполняется неравенство $\nu(S\cup T)\geqslant\nu(S)+\nu(T)$. Игра ν *выпукла*, если для всех $S,T\subseteq N$, справедливо неравенство

$$\nu(S\cup T)+\nu(S\cap T)\geqslant\nu(S)+\nu(T).$$

Известно, что *простейшие игры* $\{u_T\}_{T\neq\varnothing}^{T\subseteq N}$, задаваемые равенствами $u_T(S)=1$, если $T\subseteq N$, и $u_T(S)=0$ в противном случае, образуют базис в пространстве игр G_N, т.е. любая игра $\nu\in G_N$ допускает однозначное представление в виде линейной формы $\nu=\sum_{T\subseteq N,T\neq\varnothing}\lambda_T^\nu u_T$, где $\lambda_T^\nu=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{t-s}\nu(S)$, для всех $T\subseteq N$, $T\neq\varnothing$. Следуя Харшаньи [6], коэффициент λ_T^ν называется *дивидендом* коалиции T в игре ν.

Перестановка игроков $\pi:N\to N$ приписывает каждому игроку $i\in N$ его ранг $\pi(i)$. Пусть Π задает множество всех перестановок из N. Через $\pi^i=\{j\in N|\pi(j)\leqslant\pi(i)\}$ обозначим множество всех игроков, ранг которых не превосходит ранга i-го игрока. Вектор $m^\pi\in\Re^n$, задаваемый равенством $m_i^\pi(\nu)=\nu(\pi^i)-\nu(\pi^i\backslash\{i\})$, определяет *вектор маргинальных полезностей* игры ν, соответствующий перестановке π. Через *и* обозначим перестановку, соответствующую естественному порядку следования игроков от 1 до n, т.е. $u(i)=i$, $i\in N$, и через l перестановку, соответствующую обратному порядку $n, n-1, \dots, 1$, т.е. $l(i)=n+1-i$, $i\in N$.

Вектор Шепли [12] игры $v\in G_N$ может быть вычислен, в частности, по формуле

$$Sh_i(v)=\sum_{T\subseteq N, T\ni i}\frac{\lambda_T^v}{t} \text{ для всех } i\in N,$$

или по формуле

$$Sh_i(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi} m_i^{\pi}(v) \text{ для всех } i\in N.$$

С-ядро [5] игры $v\in G_N$ определяется как

$$C(v)=\{x\in\Re^n \mid x(N)=v(N), x(S)\geqslant v(S), \forall S\subseteq N\}.$$

Значение ξ называется *С-устойчивым*, если для любой игры $v\in G_N$ с ненулевым C-ядром, $\xi(v)\in C(v)$.

Игры с коалиционной структурой

Коалиционная структура, или другими словами, *структура априорных союзов*, на множестве игроков N задается посредством разбиения $P=\{N_1,\dots,N_m\}$ множества N, т.е. $N_1\cup\dots\cup N_m=N$ и $N_k\cap N_l=\varnothing$ при $k\neq l$. Пара $\langle v, P\rangle$, образованная игрой $v\in G_N$ и коалиционной структурой P на множестве игроков N, задает *игру с коалиционной структурой*, или другими словами, *игру с априори заданными союзами*, или коротко *P-игру*. Множество всех игр с фиксированным множеством игроков N, наделенных коалиционной структурой, обозначается G_N^P. *P-значением* называется оператор $\xi: G_N^P\to\Re^n$, приписывающий каждой P-игре $\langle v, P\rangle\in G_N^P$ вектор платежей $\xi(v,P)\in\Re^n$. Для любой игры с коалиционной структурой $\langle v, P\rangle$ Оуэн [11] ввел в рассмотрение так называемую *промежуточную игру* v_P на множестве игроков $M=\{1,\dots,m\}$, в которой каждый априорный союз N_k выступает как самостоятельный игрок:

$$v_P(Q)=v\left(\bigcup_{k\in Q} N_k\right), \text{ для всех } Q\subseteq M.$$

Следует отметить, что пара $\langle v, \{N\}\rangle$, образованная игрой v и коалиционной структурой $\{N\}$, состоящей из одного элемента — всего множества игроков, совпадает с исходной игрой v.

В дальнейшем коалиционную структуру состоящую из одиночных игроков, будем обозначать через $\langle N\rangle$, т.е. $\langle N\rangle=\{\{1\},\dots,\{n\}\}$. Кроме

того, для любого $i\in N$ через $k(i)$ обозначим индекс априорного союза, содержащего i, т.е. $i\in N_{k(i)}$. Для любого вектора платежей $x\in\Re^n$ соответствующий вектор полных платежей априорным союзам обозначим через x^P, т.е. $x^P=(x(N_k))_{k\in M}\in\Re^m$.

Игры с кооперативной структурой

Кооперативная структура на множестве игроков N задается посредством графа L, неориентированного или ориентированого. *Неориентированный граф* — это набор неупорядоченных пар вершин/игроков $L\subseteq L_N^c=\{\{i,j\} \mid i,j\in N,\ i\neq j\}$, где L_N^c является полным неориентированным графом без петель на множестве N, а неупорядоченная пара $\{i,j\}$ задает *ребро*, связывающее игроков $i,j\in N$. *Ориентированный граф* является набором ориентированных ребер $L\subseteq\bar{L}_N^c=\{\{i,j\} \mid i,j\in N,\ i\neq j\}$. Пара $\langle v, L\rangle$, образованная игрой $v\in G_N$ и коммуникационным графом L на множестве игроков N, задает *игру с кооперативной структурой*, или другими словами, *игру с графической структурой*, *графическую игру*, или коротко *G-игру*. Множество всех игр с фиксированным множеством игроков N, наделенных графической структурой, обозначается G_N^L. *G-значением* называется оператор $\xi: G_N^L\to\Re^n$, приписывающий каждой G-игре $\langle v, L\rangle\in G_N^L$ вектор платежей $\xi(v,L)\in\Re^n$.

Для каждого графа L на множестве игроков N и любой коалиции $S\subseteq N$ множество ребер $\{\{i,j\}\in L \mid i,j\in S\}$ определяет *подграф* $L|_S$. Последовательность различных вершин $\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq N$ задает *путь* в графе L, если для всех $h=1,\dots,k-1$, $\{i_h, i_{h+1}\}\in L$. Вершины $i,j\in N$ называются *связными* в графе L, если найдется путь $\{i_1,\dots,i_k\}$ в L, такой что $i_1=i$ и $i_k=j$. Граф *связен*, если в нем связны каждые две вершины. Коалиция $S\subseteq N$ называется *связной* в графе L, если подграф $L|_S$ связен. Для любого графа L и коалиции $S\subseteq N$ через $C^L(S)$ обозначим множество всех связных подкоалиций коалиции S. Любая коалиция $S\subseteq N$ разбивается графом L на максимальные связные подкоалиции, называемые *компонентами связности*. Множество всех связных компонент коалиции S обозначим через S/L, а через $(S/L)_i$ компоненту S, содержащую игрока $i\in S$. Заметим, что S/L задает разбиение коалиции S. Кроме того, следует отметить, что для любой коалиционной структуры P граф $L^c(P)=\cup N_{k\in P}L_{N_k}^c$ состоит из связных компонент $N_k\in P$ и $N/L^c(P)=P$. Вектор платежей $x\in\Re^n$ в G-игре $\langle v, L\rangle\in G_N^L$ является *компонентно эффективным*, если на любой компоненте $C\in N/L$ выполняется равенство $x(C)=v(C)$. В дальнейшем в случаях, когда необходимо явно указать множество вершин графа, вместо L будем писать L_N.

Следуя Майерсону [10], будем полагать, что в игре с кооперативной структурой $\langle \nu, L\rangle$ кооперация возможна только между связанными игроками, и введем в рассмотрение *ограниченную игру* $\nu^L \in G_N$, задаваемую равенствами

$$\nu^L(S) = \sum_{C\in S/L} \nu(C), \text{ для всех } S \subseteq N.$$

C-ядро $C(\nu, L)$ в G-игре $\langle \nu, L\rangle$ определяется как множество компонентно эффективных векторов платежей, которые не доминируются ни одной связной коалицией, т.е.

$$C(\nu, L) = \{x \in \Re^n | x(C) = \nu(C),\ \forall C \in N/L,\ x(T) \geqslant \nu(T),\ \forall T \in C^L(N)\}.$$

Нетрудно видеть, что C-ядро G-игры $\langle \nu, L\rangle$ совпадает с C-ядром ограниченной игры ν^L, т.е. $C(\nu, L) = C(\nu^L)$.

Далее наряду с кооперативными структурами, задаваемыми посредством произвольных неориентированных графов, мы будем рассматривать кооперативные структуры, определяемые неориентированными графами без циклов, а также ориентированными линейными графами с линейно упорядоченными игроками. Несколько дополнительных определений. Неориентированный граф является *графом без циклов*, если он не содержит циклов. Последовательность вершин $\{i_1, ..., i_{k+1}\} \subseteq N$ образует *цикл* в графе L, если (i) $k \geqslant 2$, (ii) $i_h \neq i_l$ для всех $h, l = 1, ..., k, h \neq l$, (iii) $i_{k+1} = i_1$, и (iv) $\{i_h, ..., i_{h+1}\} \in L$ для всех $h = 1, ..., k$. Неориентированный связный граф без циклов называется *деревом*. В ориентированном графе L $j \neq i$ является *последователем* i, а i *предшественником* , если найдется такая последовательность ориентированных ребер $\{i_h, ..., i_{h+1}\} \in L$, $h = 1, ..., k$, что $i_1 = i$ и $i_{k+1} = j$. В ориентированном ребре (i, j) j является *непосредственным последователем* i, а i — *непосредственным предшественником* j. Ориентированный граф называется *деревом с корнем*, если в нем имеется вершина, называемая *корнем*, которая не имеет предшественников и которая соединена с любой другой вершиной единственным исходящим из нее путем. Ориентированный граф называется *деревом стока*, если ориентированный граф, составленный из тех же ребер, что и исходный, но с противоположной ориентацией, является деревом с корнем. *Линейным графом* называется ориентированный граф, состоящий из ребер только между последовательными игроками. Не умаляя общности, всегда можно предполагать, что в линейном графе L вершины упорядочены в естественном порядке от 1 до n, т.е. $L \subseteq \{(i, i+1) | i = 1, ..., n-1\}$.

В дальнейшем для обозначения числа элементов произвольного множества A наряду со стандартным обозначением $|A|$ будем также использовать соответствующие строчные буквы $n = |N|$, $m = |M|$, $n_k = |N_k|$, и т.п.

3. Игры с коалиционной и кооперативной структурами

Модель игры с двумя структурами

Рассмотрим ТП игры наделенные обеими (коалиционной и кооперативной) структурами. Предполагается, что кооперация (посредством попарных переговоров между участниками) возможна только либо между целыми априорными союзами из заданной коалиционной структуры, либо между отдельными игроками внутри априорных союзов. Никакое общение, а следовательно, и никакая кооперация не разрешены между отдельными участниками из различных элементов кооперационной структуры. Переговоры на верхнем уровне между априорными союзами основаны только на обобщенных интересах всех членов этих союзов, и при этом никакие личные интересы отдельных участников в расчет не принимаются.

Комбинация ТП игры с коалиционной структурой и одновременно ограниченными возможностями кооперации, представленными посредством двухуровневой графической структуры, которая в свою очередь зависит от заданной коалиционной структуры, может быть представлена в виде модели так называемой *графической игры с коалиционной структурой* (*PG-игры*), задаваемой набором $\langle \nu, P, \langle L_M, \{L_{N_k}\}_{k\in M}\rangle\rangle$. Для упрощения обозначений и если это не приведет к недоразумению, графы L_{N_k} внутри априорных союзов N_k, $k \in M$, будем обозначать просто L_k, а графическую структуру через $\langle L_M, \{L_k\}_{k\in M}\rangle$, или проще L_P, и при этом для PG-игры будем использовать обозначение $\langle \nu, P, L_P\rangle$. В дальнейшем множество всех PG-игр $\langle \nu, P, L_P\rangle$ с $\nu \in G_N$ будем обозначать G_N^P.

Следует подчеркнуть, что в рассматриваемой модели роль коалиционной структуры первична и структура кооперации задается поверх заданной коалиционной структуры. Графическая структура $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k\in M}\rangle$ определяется посредством графов двух типов — графа L_M, связывающего априорные союзы как отдельные единицы, и графов L_k внутри априорных союзов N_k, $k \in M$, связывающих отдельных игроков. Рис. 1(а) иллюстрирует одну из возможных ситуаций внутри модели.

Предложенная модель принципиально отличается от модели Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо, и Каррераса [14], в которой коалиционная и кооперативная структуры не зависят друг от друга, и более того, коммуникационный граф, определяющий кооперативную структуру, связывает только отдельных игроков. На Рис. 1(б) приводится пример одной из возможных ситуаций в модели Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо, и Каррераса с тем же множеством игроков, той же коалиционной структурой, и даже теми же ребрами связи между игроками внутри априорных союзов, что и в предыдущем примере на Рис. 1(а). В общем случае предложенная выше модель PG-игры не сводится к модели Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо, и Каррераса. Рассмотрим к примеру переговоры между двумя странами, проходящие на уровне премьер-министров, которые в свою очередь являются гражданами своих стран. В этом случае ребро связи между странами нельзя заменить ни ребром связи, соединяющим премьер-министров, как отдельных личностей и, следовательно, в этом случае отражающим только их личные интересы, ни набором всех ребер связи, соединяющих попарно граждан одной страны с гражданами другой, и в таком случае опять представляющими контакты только на личностном уровне. Модель PG-игры и модель Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо, и Каррераса совпадают в единственном случае, когда граф L_M, определяющий кооперативную структуру между априорными союзами в нашей модели, пуст, а компоненты связности коммуникационного графа L в модели Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо, и Каррераса

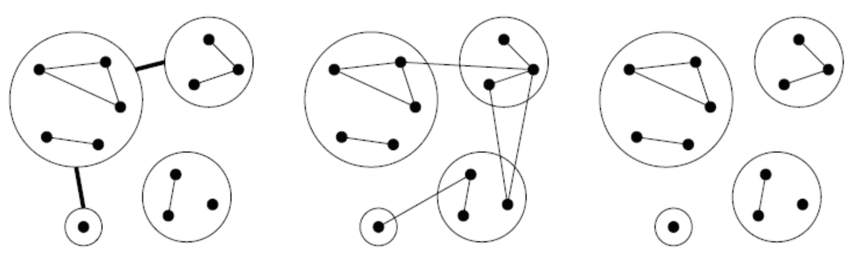

Рис. 1. а) Модель, рассматриваемая в данной работе; б) модель Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо, и Каррераса; в) случай совпадения обеих моделей

являются подмножествами исходных априорных союзов, т.е. для всех $C \in N/L$, $C \subseteq N_k \in P$. В этом случае коммуникационный граф L в модели Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо, и Каррераса совпадает с объединением всех коммуникационных графов внутри априорных союзов в нашей модели, т.е. $L = \cup_{k \in M} L_k$. Пример, иллюстрирующий данную ситуацию с тем же множеством игроков, с той же коалиционной структурой и с теми же коммуникационными графами внутри априорных союзов, что и на Рис. 1(а) приведен на Рис. 1(в).

PG-значением называется оператор $\xi : G_N^{PL} \to \Re^n$, приписывающий любой PG-игре $\langle \nu, P, L_P \rangle \in G_N^{PL}$ вектор платежей $\xi(\nu, P, L_P) \in \Re^n$.

Замечание 1. PG-игра $\langle \nu, P, L_P \rangle$, в частности, определена для тривиальных коалиционных структур P, т.е. когда $P = \langle N \rangle$ или $P = \{N\}$. Если $P = \langle N \rangle$, то имеет место $M = N$, $L_M = L_N$, и все графы внутри априорных союзов L_k, $k \in M$, являются пустыми; если же $P = \{N\}$, то множество M одноэлементно, $L_M = Ш$, и $L_1 = L_N$. Следовательно, обе PG-игры $\langle \nu, \langle N \rangle, L_{\langle N \rangle} \rangle$ и $\langle \nu, \{N\}, L_{\{N\}} \rangle$ сводятся к G-игре $\langle \nu, L_N \rangle$.

Для любой заданной PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle$, $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k \in M} \rangle$, можно рассмотреть *G-игры внутри априорных союзов* $\langle \nu_k, L_k \rangle$, $\nu_k = \nu|_{N_k}$, $k \in M$. Более того, так как задана коалиционная структура, то естественно рассмотреть промежуточную игру между априорными союзами. Однако, в случае PG-игры, при построении промежуточной игры необходимо учесть заданную структуру кооперации внутри априорных союзов. Для заданной PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle$, $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k \in M} \rangle$ определим *промежуточную игру* ν_{PL} следующим образом

$$\nu_{PL}(Q) = \begin{cases} \nu_k^{L_k}(N_k), & Q = \{k\}, \\ \nu\left(\bigcup_{k \in Q} N_k\right), & |Q| > 1, \end{cases} \quad \text{для всех } Q \subseteq M.$$

Далее естественно рассмотреть *промежуточную G-игру* $\langle \nu_{PL}, L_M \rangle$.

Для заданного G-значения φ, для любой PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle$, с графической структурой $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k \in M} \rangle$, приемлемой для применения G-значения φ к соответствующей промежуточной игре с графической структурой $\langle \nu_{PL}, L_M \rangle$[1], наряду с подигрой ν_k внутри априорного союза N_k, $k \in M$, можно рассмотреть φ_k*-игру* ν_k^{φ}, определяемую равенствами

[1] Некоторые G-значения могут применяться не ко всем G-играм, а только к тем, которые определены посредством графов определенной структуры, например, линейными графами, графами без циклов, и т.п.; более детальное обсуждение этого вопроса приводится в Разделе 4.

$$\nu_k^{\varphi}(S)=\begin{cases}\varphi_k(v_{PL},L_M), & S=N_k,\\ \nu(S), & S\neq N_k,\end{cases} \text{ для всех } S\subseteq N_k,$$

где $\varphi_k(\nu_{PL}, L_M)$ является платежом априорному союзу N_k в промежуточной G-игре, в соответствии со G-значением φ. В частности, для любого $x\in\Re^m$, x_k-игра ν_k^x внутри априорного союза N_k, $k\in M$, задается равенствами

$$\nu_k^x(S)=\begin{cases}x_k, & S=N_k,\\ \nu(S), & S\neq N_k,\end{cases} \text{ для всех } S\subseteq N_k.$$

В этом контексте естественно также рассмотреть G-игры внутри априорных союзов $\langle\nu_k^{\xi}, L_k\rangle$, $k\in M$.

C-ядро

Следуя аналогичным соображениям, что и при определении *C*-ядра для игр с графической структурой, *C-ядро* $C(\nu,P,L_P)$ PG-игры $\langle\nu,P,L_P\rangle$, $L_P=\langle L_M,\{L_k\}_{k\in M}\rangle$ определяется как множество векторов платежей, которые

(i) компонентно эффективны как в промежуточной игре с графической структурой $\langle\nu_{LP},L_M\rangle$, так и в G-играх внутри априорных союзов $\langle\nu_k^{\xi},L_k\rangle$, $k\in M$, содержащих более одного игрока;

(ii) не доминируются ни одной связной коалицией, т.е.

$$C(\nu,P,L_P)=\{x\in\Re^n \mid [[x^P(K)=\nu_{PL}(K),\ \forall K\in M/L]\ \&$$
$$\left[x^P(Q)\ge v_{PL}(Q),\forall Q\in C^{L_M}(M)\right]\Big]\&\Big[\left[x(C)=v(C),\forall C\in N_k/L_k, C\neq N_k\right] \quad (1)$$
$$\&\left[x(S)\ge v(S),\forall S\in C^{L_k}(N_k)\right],\forall k\in M: n_k>1\Big]\Big\}.$$

Замечание 2. Отметим, что в вышеприведенном определении *C*-ядра для PG-игры исключено условие компонентной эффективности на уровне внутри априорных союзов на компонентах, равных целым априорным союзам. Причина этого состоит в следующем. По определению промежуточной игры для любого $k\in M$, $\nu_{PL}(\{k\})=\nu_k^{L_k}(N_k)$. Если $N_k\in N_k/L_k$, т.е. если граф L_k связен, $\nu_k^{L_k}(N_k)=\nu(N_k)$, и следовательно, $\nu_{PL}(\{k\})=\nu(N_k)$. Кроме того, по определению $x^P(\{k\})=x_k^P=x(N_k)$ для всех $k\in M$. Более того, одноточечные коалиции всегда связны, т.е. для всех $k\in M$, $\{k\}\in C^{L_M}(M)$. В случае когда $N_k\in N_k/L_k$, наличие более сильного условия $x(N_k)=\nu(N_k)$ на уровне априорных союзов может вступить в конфликт с более слабым условием $x^P(\{k\})\geqslant\nu_{PL}(\{k\})$ на промежуточном уровне между априорными союзами, так как в данном случае последнее условие эквивалентно условию $x(N_k)\geqslant\nu(N_k)$. Это противоречие в конечном итоге может привести к пустоте *C*-ядра.

Следующее утверждение легко следует из приведенного выше определения.

Утверждение 1. *Вектор платежей $x\in\Re^n$ принадлежит C-ядру $C(\nu,P,L_P)$ PG-игры $\langle\nu,P,L_P\rangle$, $L_P=\langle L_M,\{L_k\}_{k\in M}\rangle$, в том и только том случае, если вектор x^P принадлежит C-ядру $C(\nu_{PL},L_M)$ и для всех $k\in M$, таких что $n_k>1$, вектор x_{N_k} принадлежит C-ядру $C\left(\nu_k^{x_k^P},L_k\right)$, т.е.* $x\in C(\nu,P,L_P)\Leftrightarrow[x^P\in C(\nu_{PL},L_M)]\ \&\left[x_{N_k}\in C\left(\nu_k^{x_k^P},L_k\right),\forall k\in M:n_k>1\right]$.

Замечание 3. Следует отметить, что условие $x_{N_k}\in C\left(\nu_k^{x_k^P},L_k\right)$, $k\in M$, существенно только, если $N_k\in N_k/L_k$, или что то же самое граф L_k связен; если же $N_k\notin N_k/L_k$, т.е. если граф L_k несвязен, его можно заменить условием $x_{N_k}\in C(\nu_k,L_k)$.

4. Компонентно эффективные G-значения

Прежде чем перейти к обсуждению PG-значений для PG-игр, приведем обзор нескольких известных G-значений для игр с графической структурой и покажем, что они допускают рассмотрение в рамках единой схемы.

G-значение ξ является *компонентно эффективным* (КЭ), если для любой G-игры $\langle\nu,L\rangle$, для всех $C\in N/L$, выполняется равенство

$$\sum_{i\in C}\xi_i(v,L)=v(C).$$

Значение Майерсона

Значение Майерсона [10] для любой игры с кооперативной структурой $\langle\nu,L\rangle$, задаваемой произвольным неориентированным графом L, определяется как вектор Шепли в соответствующей ограниченной игре ν^L, т.е.

$$\mu_i(\nu,L)=Sh_i(\nu^L) \text{ для всех } i\in N.$$

Значение Майерсона может быть охарактеризовано посредством двух аксиом, аксиомы компонентной эффективности и аксиомы справедливости.

G-значение ξ называется *справедливым* (С), если для любой G-игры $\langle \nu, L\rangle$ и для любого ребра $\{i,j\}\in L$ имеет место равенство

$$\xi_i(\nu,L)=\xi_i(\nu,L\setminus\{i,j\})=\xi_j(\nu,L)-\xi_j(\nu,L\setminus\{i,j\}).$$

Позиционное значение

Позиционное значение для игр с кооперативной структурой, задаваемой произвольным неориентированным графом, предложенное Мессеном [9] и получившее дальнейшее развитие в работе Борма, Оуэна, и Тайса [3], приписывает каждому игроку в G-игре $\langle \nu, L\rangle$ сумму $\nu(i)$ и половину платежа каждому ребру, связывающему этого игрока, определяемого посредством вектора Шепли в ассоциированной игре на ребрах из L. Точнее,

$$\pi_i(\nu,L)=\nu(i)+\frac{1}{2}\sum_{l\in L_i} Sh_l\left(L,\nu_L^0\right) \text{ для всех } i\in N,$$

где $L_i=\{l\in L : i\in l\}$, ν^0 обозначает нулевую нормализацию игры ν, т.е. для всех $S\subseteq N$, $\nu^0(S)=\nu(S)-\Sigma_{i\in S}\nu(i)$, и для любой нормализованной на нуль игры $\nu\in G_N$ и любого графа L, ассоциированная игра на ребрах из L, определяется равенствами

$$\nu_L(L')=\nu^{L'}(N) \text{ для всех } L'\in 2^L.$$

Сликкер [13] показал, что позиционное значение на классе всех G-игр может быть охарактеризовано через компонентную эффективность и аксиому сбалансированности пореберных вкладов.

G-значение ξ удовлетворяет *свойству сбалансированности пореберных вкладов* (СПВ), если для любой G-игры $\langle \nu, L\rangle$ и для любых $i,j\in N$ имеет место равенство

$$\sum_{h:\{i,h\}\in L}\left[\xi_j(\nu,L)-\xi_j\left(\nu,L\setminus\{i,h\}\right)\right]=\sum_{h:\{j,h\}\in L}\xi_i(\nu,L)-\xi_i\left(\nu,L\setminus\{j,h\}\right).$$

Значение усредненного дерева для G-игр с графической структурой без циклов

Новое интересное и алгоритмически привлекательное[1] решение для G-игр с произвольными неориентированными графами без циклов, так называемое решение усредненного дерева (УД-решение), было предложено недавно Херингсом, Лааном, и Тальманом [7]. Напомним определение. Рассмотрим G-игру $\langle \nu, L\rangle$ с неориентированным графом без циклов L, и пусть $i\in N$. i принадлежит компоненте $(N/L)_i$ и индуцирует дерево с корнем $T(i)$ на $(N/L)_i$ следующим образом. Из определения графа без циклов следует, что для любого $j\in (N/L)_i\setminus\{i\}$ в подграфе $\langle (N/L)_i, L_{(N/L)_i}\rangle$ имеется единственный путь из i в j. Это позволяет заменить неориентированные ребра вдоль этого пути на ориентированные так, что первой вершиной в любом ориентированном ребре является вершина, появляющаяся первой на пути из i в j. Платеж игроку $j\in (N/L)_i$ (очевидно, что в этом случае $(N/L)_i=(N/L)_j$), ассоциированный с деревом $T(i)$, определяется равным стоимости коалиции, состоящей из игрока j и всех его последователей в $T(i)$, минус сумма стоимостей всех коалиций, состоящих из любого непосредственного последователя игрока j в $T(i)$ и всех последователей этого непосредственного последователя, т.е.

$$t_j^i(\nu,L)=\nu\left(\bar{S}_{T(i)}(j)\right)-\sum_{h\in F_{T(i)}(j)}\nu\left(\bar{S}_{T(i)}(h)\right) \text{ для всех } j\in (N/L)_i,$$

где для всех $j\in (N/L)_i$, $F_{T(i)}(j)=\{h\in (N/L)_i \mid (j,h)\in T(i)\}$ является множеством всех непосредственных последователей игрока j в $T(i)$, $S_{T(i)}(j)$ множеством всех последователей j в $T(i)$, и $\bar{S}_{T(i)}(j)=S_{T(i)}(j)\cup j$. Всякая компонента $C\in N/L$ в графе без циклов L индуцирует $|C|$ различных деревьев, каждое из которых определяется своей вершиной. *Решение усредненного дерева* для каждой G-игры $\langle \nu, L\rangle$ без циклов определяет вектор платежей, согласно которому игрок $j\in N$ получает усредненный платеж из платежей $t_j^i(\nu,L)$, $i\in (N/L)_j$, т.е.

$$УД_j(\nu,L)=\frac{1}{|(N/L)_j|}\sum_{i\in(N/L)_j} t_j^i(\nu,L) \text{ для всех } j\in N.$$

Решение усредненного дерева на классе супераддитивных G-игр с графической структурой без циклов оказывается C-устойчивым. На всем классе G-игр игр с графической структурой без циклов решение усредненного дерева характеризуется с помощью двух аксиом, компонентной эффективности и компонентной справедливости.

G-значение ξ является *компонентно справедливым* (КС), если для любой G-игры без циклов $\langle \nu, L\rangle$ и для любого ребра $\{i,j\}\in L$, имеет место равенство

[1] Вычислительная трудоемкость УД-решения имеет порядок n; для сравнения вычислительная трудоемкость значения Майерсона (вектора Шепли) имеет порядок n!.

$$\frac{1}{|(N/L\setminus\{i,j\})_i|}\sum_{t\in(N/L\setminus\{i,j\})_i}\xi_t(\nu,L)-\xi_t(\nu,L\setminus\{i,j\})=$$

$$=\frac{1}{|(N/L\setminus\{i,j\})_j|}\sum_{t\in(N/L\setminus\{i,j\})_j}\xi_t(\nu,L)-\xi_t(\nu,L\setminus\{i,j\}).$$

Значения для G-игр с линейной графической структурой

Различные значения для G-игр, в которых кооперативная структура представлена посредством линейного графа, исследуются в работе Бринка, Лаана, и Васильева [4]. Наряду со значением Майерсона для G-игр $\langle\nu,L\rangle$ с линейным графом L, авторы рассматривают еще три значения, а именно, так называемые *верхнеэквивалентное решение*

$$\xi_i^{ВЭ}(\nu,L)=m_i^u(\nu^L)\text{ для всех }j\in N,$$

нижнеэквивалентное решение

$$\xi_i^{НЭ}(\nu,L)=m_i^l(\nu^L)\text{ для всех }j\in N,$$

и *решение равных потерь*

$$\xi_i^{РП}(\nu,L)=\frac{m_i^u(\nu^L)+m_i^l(\nu^L)}{2}\text{ для всех }j\in N.$$

Все три из вышеприведенных решений для супераддитивных G-игр с линейной графической структурой оказываются C-устойчивыми. Кроме того, на множестве всех G-игр с линейной графической структурой каждое из этих решений характеризуется посредством двух аксиом, компонентной эффективности и одной из следующих аксиом, отражающих различные требования справедливости, соответственно.

G-значение ξ является *верхнеэквивалентным* (ВЭ), если для любой G-игры $\langle\nu,L\rangle$ с линейной графической структурой L, для любого $i=1,\dots,n-1$, для всех $j=1,\dots,i$ имеет место равенство

$$\xi_j(\nu,L\setminus\{i,i+1\})=\xi_j(\nu,L).$$

G-значение ξ является *нижнеэквивалентным* (НЭ), если для любой G-игры $\langle\nu,L\rangle$ с линейной графической структурой L, для любого $i=1,\dots,n-1$, для всех $j=i+1,\dots,n$ имеет место равенство

$$\xi_j(\nu,L\setminus\{i,i+1\})=\xi_j(\nu,L).$$

G-значение ξ удовлетворяет свойству *равных потерь* (РП), если для любой G-игры $\langle\nu,L\rangle$ с линейной графической структурой L, для любого $i=1,\dots,n-1$, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{i}\left(\xi_j(\nu,L)-\xi_j(\nu,L\setminus\{i,i+1\})\right)=\sum_{j=i+1}^{n}\left(\xi_j(\nu,L)-\xi_j(\nu,L\setminus\{i,i+1\})\right).$$

Значения для G-игр с ориентированной графической структурой дерева с корнем или дерева стока

Два следующих значения для G-игр с ориентированной кооперативной структурой, заданной посредством дерева с корнем или дерева стока, рассматриваются в работе автора [8].

Значение дерева для G-игр $\langle\nu,L\rangle$ с ориентированной графической структурой задается равенствами

$$t_i(\nu,L)=\nu(\bar S_L(i))-\sum_{j\in F_L(i)}\nu(\bar S_L(j))\text{ для всех }i\in N,$$

где $F_L(i)$ множество всех непосредственных последователей игрока i в графе L, $S_L(i)$ множество всех последователей i в L, $\bar S_L(i)=S_L(i)\cup i$.

Значение стока для G-игр $\langle\nu,L\rangle$ с ориентированной графической структурой задается равенствами

$$s_i(\nu,L)=\nu(\bar P_L(i))-\sum_{j\in O_L(i)}\nu(\bar P_L(j))\text{ для всех }i\in N.\ i\in N,$$

где $O_L(i)$ множество всех непосредственных предшественников игрока i в графе L, $P_L(i)$ множество всех предшественников i в L, а $\bar P_L(i)=P_L(i)\cup i$.

Оба значения дерева и стока для супераддитивных G-игр с ориентированной графической структурой соответственно дерева с корнем или дерева стока являются C-устойчивыми. На множестве всех G-игр с ориентированной графической структурой дерева с корнем (дерева стока) значение дерева (стока) характеризуется посредством двух аксиом, компонентной эффективности и эквивалентностью для последователей (предшественников).

G-значение ξ является *эквивалентным для последователей* (ПоЭ) на классе G-игр $G^L\subseteq G_N^L$ с ориентированной графической структурой, если для любой G-игры $\langle\nu,L\rangle\in G^L$, для любого ребра $(i,j)\in L$, при всех $k\in\bar S_L(j)$, имеет место равенство

$$\xi_k(\nu,L\setminus(i,j))=\xi_k(\nu,L).$$

G-значение ξ является *эквивалентным для предшественников* (*ПрЭ*) на классе G-игр $G^L \subseteq G_N^L$ с ориентированной графической структурой, если для любой G-игры $\langle \nu, L\rangle \in G^L$, для любого ребра $(i,j) \in L$, при всех $k \in \bar{P}_L(j)$, имеет место равенство

$$\xi_k(\nu, L \setminus (i,j)) = \xi_k(\nu, L).$$

Единый подход к компонентно эффективным G-значениям

Обратим внимание, что каждое из рассмотренных выше G-значений для G-игр с *допустимой* графической структурой характеризуется посредством двух аксиом, компонентной эффективности и тем или иным *свойством удаления ребра из графа* (УРГ), отражающим соответствующую реакцию рассматриваемого *G*-значения на удаление ребра из графа, определяющего кооперативную структуру, т.е.

КЭ + С для всех G-игр $\Leftrightarrow \mu(\nu, L) = Sh(\nu^L)$,
КЭ + СПВ для всех G-игр $\Leftrightarrow \pi(\nu, L)$,
КЭ + КС для всех G-игр с графом без циклов $\Leftrightarrow$ *УД*(ν, L),
КЭ + ВЭ для всех G-игр с линейным графом $\Leftrightarrow m^u(\nu^L)$,
КЭ + НЭ для всех G-игр с линейным графом $\Leftrightarrow m^l(\nu^L)$,

КЭ + РП для всех G-игр с линейным графом $\Leftrightarrow \dfrac{m^u(\nu^L) + m^l(\nu^L)}{2}$,

КЭ + ПоЭ для всех G-игр с деревом с корнем $\Leftrightarrow t(\nu, l)$,
КЭ + ПрЭ для всех G-игр с деревом стока $\Leftrightarrow s(\nu, l)$.

В дальнейшем для единообразия представления и упрощения обозначений каждое из перечисленных выше G-значений будем идентифицировать посредством соответсвующей *УРГ* аксиомы. Для заданной УРГ аксиомы пусть $G_N^{УРГ} \subseteq G_N^L$ обозначает множество всех G-игр $\langle \nu, L\rangle$, в которых графическая структура L допустима для применения этой аксиомы. Резюмируя приведенную выше схему, можно утверждать,

$$\text{КЭ + УРГ на } G_N^{УРГ} \Leftrightarrow УРГ(\nu, L),$$

где УРГ является одной из аксиом С, СПВ, КС, ВЭ, НЭ, РП, ПоЭ, ПрЭ.

Таким образом, под *С*-значением мы понимаем значение Майерсона, т.е. $C(\nu, L) = \mu(\nu, L)$ для всех G-игр; под *СПВ*-значением — позиционное значение, т.е. $СПВ(\nu, L) = \pi(\nu, L)$, для всех G-игр; под *КС*-значением — решение усредненного дерева, т.е. $КС(\nu, L) = УД(\nu, L)$ для всех G-игр с графом без циклов; под *ВЭ*-значением — верхнеэквивалентное решение, т.е. $ВЭ(\nu, L) = m_i^u(\nu^L)$ для всех G-игр с линейным графом; под *НЭ*-значением — нижнеэквивалентное решение, т.е. $НЭ(\nu, L) = m_i^l(\nu^L)$, для всех G-игр с линейным графом; под *РП*-значением — решение равных потерь, равное полусумме *ВЭ*- и *НЭ*-решений, т.е. $РП(\nu, L) = \dfrac{m_i^u(\nu^L) + m_i^l(\nu^L)}{2}$, для всех G-игр с линейным графом; под *ПоЭ*-значением — значение дерева, т.е. $ПоЭ(\nu, L) = t(\nu, L)$ для всех G-игр $\langle \nu, L\rangle$ с ориентированной графической структурой дерева с корнем, а под *ПрЭ*-значением — значение стока, т.е. $ПрЭ(\nu, L) = s(\nu, L)$ для всех G-игр $\langle \nu, L\rangle$ с ориентированной графической структурой дерева стока.

5. PG-значения

Компонентно эффективные PG-значения

В этом разделе мы адаптируем понятия компонентной эффективности и рассмотренные выше различные свойства удаления ребра из графа для G-значений к PG-значениям и покажем, что также как и в случае компонентно эффективных G-значений, та или иная аксиома УРГ однозначно определяет компонентно эффективное PG-значение на классе PG-игр с допустимой графической структурой. Рассмотрение нескольких различных свойств удаления ребра из графа прежде всего расширяет понятие решения для PG-игр. Кроме того, во многих случаях, в зависимости от рассматриваемой графической структуры, это позволяет выбрать подходящее решение, в частности, исходя из его вычислительной эффективности.

Начнем с двух новых аксиом компонентной эффективности для PG-значений, которые с одной стороны наследуют идею компонентной эффективности G-значений, а с другой отражают также свойство промежуточной игры[1] Оуэна [11] в том смысле, что вектор полных платежей априорным союзам совпадает с вектором платежей в промежуточной игре между априорными союзами.

PG-значение ξ является *компонентно эффективным на уровне априорных союзов* (КЭУС), если для любой PG-игры $\langle \nu, P, L_P\rangle$, $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k\in M}\rangle$, для всех $K \in M/L_M$, имеет место равенство

[1] P-значение ξ удовлетворяет *свойству промежуточной игры*, если для любой игры с коалиционной структурой $\langle \nu, P,\rangle$, для всех $k \in M$, $\xi_k(\nu_P, \{M\}) = \xi_k(\nu_P, \langle M\rangle) = \sum_{i\in N_k} \xi_i(\nu, P)$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in N_k}\xi_i(\nu,P,L_P)=\nu_{PL}(K).$$

PG-значение ξ является *компонентно эффективным внутри априорных союзов* (КЭВС), если для любой PG-игры $\langle \nu,P,L_P\rangle$, $L_P=\langle L_M,\{L_k\}_{k\in M}\rangle$, для всех $k\in M$ и всех $C\in N_k/L_k$, $C\neq N_k$, имеет место равенство

$$\sum_{i\in C_k}\xi_i(\nu,P,L_P)=\nu(C).$$

Рассмотрим теперь свойства удаления ребра из графа, уже в применении к PG-играм. Прежде всего напомним, что PG-значение является оператором $\xi: G_N^{PL}\to\Re^n$. Каждый оператор $\xi=\{\xi_i\}_{i\in M}$, определенный на G_N^{PL}, порождает оператор $\xi^P: G_N^{PL}\to\Re^m$, $\xi^P=\{\xi_k^P\}_{k\in M}$, где $\xi_k^P=\sum_{i\in N_k}\xi_i$, $k\in M$, и m операторов $\xi_{N_k}: G_N^{PL}\to\Re^{n_k}$, $\xi_{N_k}=\{\xi_i\}_{i\in N_k}$, $k\in M$. Далее отметим, что так как множество различных PG-игр $\langle \nu,P,L_P\rangle$ порождают одну и ту же промежуточную G-игру $\langle \nu_{PL},L_M\rangle$, имеется множество операторов $\psi_P: G_M^L\to G_N^{PL}$, сопоставляющих G-игре $\langle u,L\rangle\in G_M^L$ PG-игру $\langle \nu,P,L_P\rangle\in G_N^{PL}$, для которой $\nu_{PL}=u$ и $L_M=L$. В общем случае равенство $\psi_P(\nu_{PL},L_M)=\langle \nu,P,L_P\rangle$ выполняться не обязано. Однако, для любой фиксированной PG-игры $\langle \nu^*,P^*,L_P^*\rangle$ можно всегда выбрать оператор ψ_P^*, такой что $\psi_P^*(\nu_{PL}^*,L_M^*)=\langle \nu^*,P^*,L_P^*\rangle$. Каждый оператор $\xi^P\circ\psi_P: G_M^L\to\Re^m$ определяет G-значение, которое, в частности, можно применить к промежуточной G-игре $\langle \nu_{PL},L_M\rangle\in G_M^L$, соответствующей PG-игре $\langle \nu,P,L_P\rangle\in G_N^{PL}$. Аналогично, для любого G-значения φ, для любого $k\in M$ найдется множество операторов $\psi_k^\varphi: G_{N_k}^L\to G_N^{PL}$, приписывающих произвольной G-игре $\langle u,L\rangle\in G_{N_k}^L$ PG-игру $\langle \nu,P,L_P\rangle\in G_N^{PL}$, для которой $\nu_k^\varphi=u$ и $L_k=L$. Для каждого $k\in M$ оператор $\xi_{N_k}\circ\psi_k^\varphi: G_{N_k}^L\to\Re^{n_k}$ задает G-значение, которое, в частности, можно применить к φ_k-игре с графической структурой $\langle \nu_k^\varphi,L_k\rangle\in G_{N_k}^L$, соответствующей PG-игре $\langle \nu,P,L_P\rangle\in G_N^{PL}$. Для заданного набора из $m+1$ УРГ аксиом $\langle УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}\rangle$ рассмотрим множество PG-игр $G_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}\subseteq G_N^{PL}$, состоящее из PG-игр $\langle \nu,P,L_P\rangle$, у которых графическая структура $L_P=\langle L_M,\{L_k\}_{k\in M}\rangle$ такова, что $\langle \nu_{PL},L_M\rangle\in G_M^{УРГ^P}$ и $\langle \nu_k^{УРГ^P},L_k\rangle\in G_{N_k}^{УРГ^k}$, $k\in M$.

PG-значение ξ, определенное на $G_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$, *удовлетворяет* $(m+1)$*-набору УРГ аксиом* $\langle УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}\rangle$, если соответствующее G-значение $\xi^P\circ\psi_P$ удовлетворяет аксиоме $УРГ^P$ и для всех $k\in M$ соответствующие G-значения $\xi_{N_k}\circ\psi_k^{УРГ^P}$ удовлетворяет аксиоме $УРГ^k$ соответственно.

Целью данной работы является характеризация компонентно эффектив-ных PG-значений, которые отражают процедуру двухуровневого рас-пределения, когда сначала разыгрывается промежуточная G-игра $\langle \nu_{PL},L_M\rangle$ между априорными союзами, а затем доля y_k, полученная априорным союзом N_k, $k\in M$, распределяется среди его членов посредством розыгрыша G-игры $\langle \nu_k^y,L_k\rangle$. Однако, чтобы гарантировать полное распределение доли каждого априорного союза среди его участников, или иными словами, чтобы полный доход всех членов любого априорного союза равнялся платежу этому союзу в промежуточной G-игре, введем дополнительное предположение об эффективности решений во всех G-играх $\langle \nu_k^y,L_k\rangle$, $k\in M$. При этом, чтобы избежать возможного противоречия между требованиями эффективности и компонентной эффективности, необходимо потребовать, чтобы

$$\sum_{C\in N_k/L_k}\nu_k^y(C)=y_k,\ \text{для всех } k\in M.$$

В случае, если граф L_k связен, т.е. если N_k является единственным элементом N_k/L_k, последнее равенство выполняется автоматически, так как по определению $\nu_k^y(N_k)=y_k$. Иначе, для любого $k\in M$, при котором граф L_k несвязен, необходимо потребовать выполнения равенства

$$\sum_{C\in N_k/L_k}\nu(C)=y_k. \tag{2}$$

Будем говорить, что в PG-игре $\langle \nu,P,L_P\rangle$ *графическая структура внутри априорных союзов* $\{L_k\}_{k\in M}$ *совместна* с вектором платежей $y\in\Re^m$ в промежуточной G-игре $\langle \nu_{PL},L_M\rangle$, если для любого $k\in M$ либо граф L_k связен, либо выполняется равенство (2).

Для приложений, в которых графы L_k, $k\in M$ могут быть несвязны, требование совместности (2) является весьма обременительным. Однако, следует отметить следующее.

Замечание 4. Если все L_k, $k\in M$, связны, графическая структура внутри априорных союзов $\{L_k\}_{k\in M}$ всегда совместна с любым вектором платежей $y\in\Re^m$ в промежуточной G-игре $\langle \nu_{PL},L_M\rangle$, и в этом случае эффективность следует из компонентной эффективности автоматически.

Обозначим через $\bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$ множество PG-игр $\langle \nu,P,L_P\rangle\in G_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$, у которых графическая структура внутри априорных союзов $\{L_k\}_{k\in M}$ совместна с вектором платежей $УРГ^P(\nu_{PL},L_M)$ в промежуточной G-игре.

Теорема 1. *Существует единственное PG-значение, определенное на* $\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$*, которое удовлетворяет аксиомам КЭУС, КЭВС и* $\langle \text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}\rangle$*, и для любой PG-игры* $\langle \nu,P,L_P\rangle\in\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$ *оно задается равенством*

$$\xi_i(\nu,P,L_P)=\begin{cases}\text{УРГ}^P_{k(i)}(\nu_{PL},L_M), & N_{k(i)}=\{i\},\\ \text{УРГ}^{k(i)}_i\left(\nu_{k(i)}^{\text{УРГ}^P},L_{k(i)}\right), & n_{k(i)}>1,\end{cases}\quad \textit{для всех } i\in N. \tag{3}$$

В дальнейшем PG-значение ξ будем называть $\langle \text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}\rangle$-*значением.*

Доказательство.

I. Сначала докажем, что PG-значение, задаваемое формулой (3), является единственным на $\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$ PG-значением, удовлетворяющим аксиомам КЭУС, КЭВС и $\langle \text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}\rangle$. Для этого рассмотрим PG-значение ξ, определенное на $\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$ и удовлетворяющее аксиомам КЭУС, КЭВС и $\langle \text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}\rangle$. Рассмотрим PG-игру $\langle \nu^*,P^*,L_P^*\rangle\in\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$, $L_M^*=\left\langle L_M^*,\{L_k^*\}_{k\in M}\right\rangle$, и пусть ν_{PL}^* является соответствующей промежуточной игрой. Отметим, что в силу выбора PG-игры $\langle \nu^*,P^*,L_P^*\rangle$, $\langle \nu_{PL}^*,L_M^*\rangle\in G_M^{\text{УРГ}^P}$ и $\left\langle(\nu^*)_k^{\text{УРГ}^P},\ L_k^*\right\rangle\in G_{N_k}^{\text{УРГ}^k}$ при всех $k\in M$.

Шаг 1. Уровень априорных союзов.

Рассмотрим оператор $\psi_P^*:G_M^{\text{УРГ}^P}\to\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$, приписывающий любой G-игре $\langle u,L\rangle\in G_M^{\text{УРГ}^P}$ PG-игру $\langle \nu,P,L_P\rangle\in\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$ так, что $\nu_{PL}=u$ и $L_M=L$, и удовлетворяющий условию $\psi_P^*(\nu_{PL}^*,L_M^*)=\langle \nu^*,P^*,L_P^*\rangle$. Для любой G-игры $\langle u,L\rangle\in G_M^{\text{УРГ}^P}$ и для $\langle \nu,P,L_P\rangle=\psi_P^*(u,L)$ из определения ξ^P следует

$$\left(\xi^P\circ\psi_P^*\right)_k(u,L)=\sum_{i\in N_k}\xi_i(\nu,P,L_P),\ \text{для всех } k\in M. \tag{4}$$

Так как ξ удовлетворяет КЭУС, то для любой PG-игры $\langle \nu,P,L_P\rangle\in\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$, для всех $K\in M/L_M$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in N_k}\xi_i(\nu,P,L_P)=\nu_{PL}(K).$$

Объединяя два последних равенства и принимая во внимание, что по определению ψ_P^*, $\nu_{PL}=u$ и $L_M=L$, получаем, что для любой G-игры $\langle u,L\rangle\in G_M^{\text{УРГ}^P}$, для всех $K\in M/L_M$,

$$\sum_{k\in K}\left(\xi^P\circ\psi_P^*\right)_k(u,L)=u(K),$$

т.е. G-значение $\xi^P\circ\psi_P^*$ на $G_M^{\text{УРГ}^P}$ удовлетворяет КЭ. Далее, в силу приведенных выше в разделе 4 результатов относительно характеризации G-значений, аксиомы КЭ вместе с УРГ^P обеспечивают для любой G-игры $\langle u,L\rangle\in G_M^{\text{УРГ}^P}$ выполнение равенств

$$\left(\xi^P\circ\psi_P^*\right)_k(u,L)=\text{УРГ}^P_k(u,L)\ \text{для всех } k\in M.$$

В частности, последние равенства выполняется при $\langle u,L\rangle=\left\langle v_{PL}^*,L_M^*\right\rangle\in G_M^{\text{УРГ}^P}$, т.е.

$$\left(\xi^P\circ\psi_P^*\right)_k\left(\nu_{PL}^*,L_M^*\right)=\text{УРГ}^P_k\left(\nu_{PL}^*,L_M^*\right)\ \text{для всех } k\in M.$$

Тогда из (4) и вследствие выбора оператора ψ_P^*, получаем

$$\sum_{i\in N_k}\xi_i\left(\nu^*,P^*,L_P^*\right)=\text{УРГ}^P_k\left(\nu_{PL}^*,L_M^*\right)\ \text{для всех } k\in M.$$

В силу произвольности выбора PG-игры $\langle \nu^*,P^*,L_P^*\rangle\in\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$ для любой PG-игры $\langle \nu,P,L_P\rangle\in\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$ имеет место

$$\sum_{i\in N_k}\xi_i(\nu,P,L_P)=\text{УРГ}^P_k(\nu_{PL},L_M)\ \text{для всех } k\in M. \tag{5}$$

Отметим, что при всех $k\in M$, таких что $N_k=\{i\}$, равенство (5) сводится к

$$\xi_i(\nu,P,L_P)=\text{УРГ}^P_{k(i)}(\nu_{PL},L_M)\ \text{для всех } i\in N{:}N_{k(i)}=\{i\}. \tag{6}$$

Шаг 2. Уровень отдельных игроков внутри априорных союзов

Рассмотрим теперь $k'\in M$, при котором $n_{k'}>1$. Предположим, что оператор $\psi_k^*:G_{N_k}^{\text{УРГ}^k}\to\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$, приписывающий любой G-игре $\langle u,L\rangle\in G_{N_k}^{\text{УРГ}^k}$ PG-игру $\langle \nu,P,L_P\rangle\in\overline{G}_N^{\text{УРГ}^P,\{\text{УРГ}^k\}_{k\in M}}$ так, что $v_k^{\text{УРГ}^P}=u$ и $L_{k'}=L$, удовлетворяет условию $\psi_k^*\left(\left(\nu^*\right)_k^{\text{УРГ}^P},L_k^*\right)=\left\langle \nu^*,P^*,L_P^*\right\rangle$. Тогда по определению ξ_{N_k}, для любой G-игры $\langle u,L\rangle\in G_{N_k}^{\text{УРГ}^k}$ и для $\langle \nu,P,L_P\rangle=\psi_k^*(u,L)$ имеем

$$\left(\xi_{N_k}\circ\psi_k^*\right)_i(u,L)=\xi_i(\nu,P,L_P)\ \text{для всех } i\in N_{k'}. \tag{7}$$

Так как по условию PG-значение ξ удовлетворяет КЭВС, то для любой PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$, для всех $C \in N_{k'}/L_{k'}$, $C \neq N_{k'}$,

$$\sum_{i\in C} \xi_i(\nu, P, L_P) = \nu(C).$$

Из (5), в частности, следует, что для любой PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$, такой что $N_{k'} \in N_{k'}/L_{k'}$,

$$\sum_{i\in N_{k'}} \xi_i(\nu, P, L_P) = УРГ^P_{k'}(\nu_{PL}, L_M).$$

Из (7) и двух последних равенств, а также так как в силу выбора $\psi^*_{k'}$ $\nu_k^{УРГ^P} = u$ и $L_{k'} = L$, и следовательно, для всех $C \in N_{k'}/L$, $C \neq N_{k'}$, $v(C) = \nu|_{N_{k'}}(C) = \nu_{k'}^{УРГ^P}(C) = u(C)$, получаем, что для любой G-игры $\langle u, L \rangle \in G_{N_k}^{УРГ^k}$ для всех $C \in N_{k'}/L$,

$$\sum_{i\in C} \left(\xi_{N_{k'}} \circ \psi^*_{k'}\right)_i (u, L) = \begin{cases} УРГ^P_{k'}(\nu_{PL}, L_M),\ C = N_{k'}, \\ u(C), \qquad C \neq N_{k'}, \end{cases}$$

где $\langle \nu_{PL}, L_M \rangle$ является промежуточной G-игрой для PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle = \psi^*_{k'}(u, L)$. Отсюда следует, что G-значение $\xi_{N_{k'}} \circ \psi^*_{k'}$ на множестве G-игр $G_{N_{k'}}^{УРГ^{k'}}(УРГ^P_{k'})$, определяемом как

$$G_{N_{k'}}^{УРГ^{k'}}(УРГ^P_{k'}) = \left\{ \langle u, L \rangle \in G_{N_{k'}}^{УРГ^{k'}} \mid u(N_{k'}) = УРГ^P_{k'}(\nu_{PL}, L_M) \right.$$

$$\text{для } \langle \nu, P, L_P \rangle = \psi^*_{k'}(u, L),$$

удовлетворяет КЭ. КЭ вместе с $УРГ^{k'}$ обеспечивают, что для любой G-игры $\langle u, L \rangle \in G_{N_{k'}}^{УРГ^{k'}}(УРГ^P_{k'})$

$$\left(\xi_{N_{k'}} \circ \psi^*_{k'}\right)_i (u, L) = УРГ^{k'}_i(u, L) \text{ для всех } i \in N_{k'}.$$

Заметим теперь, что в силу выбора $\psi^*_{k'}$, $\left\langle (\nu^*)_{k'}^{УРГ^P}, L^*_{k'} \right\rangle \in G_{N_{k'}}^{УРГ^{k'}}(УРГ^P_{k'})$. Следовательно, последнее равенство справедливо, в частности, и для G-игры $\left\langle (\nu^*)_{k'}^{УРГ^P}, L^*_{k'} \right\rangle$, т.е.

$$\left(\xi_{N_{k'}} \circ \psi^*_{k'}\right)_i \left((\nu^*)_{k'}^{УРГ^P}, L^*_{k'}\right) = УРГ^{k'}_i\left((\nu^*)_{k'}^{УРГ^P}, L^*_{k'}\right) \text{ для всех } i \in N_{k'}.$$

Отсюда вследствие (7) и в силу выбора $\psi^*_{k'}$ получаем, что

$$\xi_i(\nu^*, P^*, L^*_P) = УРГ^{k'}_i\left((\nu^*)_{k'}^{УРГ^P}, L^*_{k'}\right) \text{ для всех } i \in N_{k'}.$$

Вследствие произвольности выбора PG-игры $\langle \nu^*, P^*, L^*_P \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$ и $k' \in M$, при котором $n_{k'} > 1$, для любой PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$ выполняется

$$\xi_i(\nu, P, L_P) = УРГ^{k(i)}_i\left(\nu_{k(i)}^{УРГ^P}, L_{k(i)}\right) \text{ для всех } i \in N: n_{k(1)} > 1. \qquad (8)$$

Отметим, что доказательство равенства (8) базируется на равенстве (5) только в случае, когда $N_k \in N_k/L_k$. Но равенство (5) выполняется для всех N_k, $k \in M$. Чтобы исключить возможность противоречия, покажем, что на $\bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$ (8) согласуется с (5) также когда $N_k \notin N_k/L_k$. Предположим, что в PG-игре $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$ $n_{k''} > 1$ и $N_{k''} \notin N_{k''}/L_{k''}$ при некотором $k'' \in M$. Тогда в силу (8)

$$\sum_{i\in N_{k''}} \xi_i(\nu, P, L_P) = \sum_{C\in N_{k''}/L_{k''}} \sum_{i\in C} \xi_i(\nu, P, L_P) = \sum_{C\in N_{k''}/L_{k''}} \sum_{i\in C} УРГ^{k''}_i\left(\nu_{k''}^{УРГ^P}, L_{k''}\right).$$

Откуда, вследствие компонентной эффективности $УРГ^{k''}$-значения и так как для любого $C \in N_{k''}/L_{k''}$, $C \neq N_{k''}$, выполняется $\nu_{k''}^{УРГ^P}(C) = \nu_{k''}(C) = \nu|_{N_{k''}}(C) = \nu(C)$, получаем, что

$$\sum_{i\in N_{k''}} \xi_i(\nu, P, L_P) = \sum_{C\in N_{k''}/L_{k''}} \nu(C).$$

В силу определения $\bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$ графическая структура внутри априорных союзов $\{L_k\}_{k\in M}$ в PG-игре $\langle \nu, P, L_P \rangle$ совместна с вектором платежей $УРГ^P(\nu_{PL}, L_M)$, что означает

$$\sum_{C\in N_k/L_k} \nu(C) = УРГ^P_k(\nu_{PL}, L_M) \text{ для всех } k \in M: N_k \notin N_k/L_k. \qquad (9)$$

Объединяя последние два равенства, получаем, что (5) выполняется также и при k''.

Для завершения доказательства п. I достаточно заметить, что (6) и (8) вместе порождают формулу (3).

II. Покажем теперь, что PG-значение ξ, заданное на $\bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$ посредством формулы (3), удовлетворяет аксиомам КЭУС, КЭВС и $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle$. Рассмотрим произвольную PG-игру $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P,\{УРГ^k\}_{k\in M}}$. Не умаляя общности можно предполагать, что для всех $k \in M$, $n_k > 1$. Выберем некоторое $k \in M$ и пусть $C \in N_k/L_k$. Из формулы (3) в силу компонентной эффективности $УРГ^k$-значения вытекает, что

$$\sum_{i\in C} \xi_i(\nu, P, L_P) = \nu_k^{УРГ^P}(C). \qquad (10)$$

Если $C \neq N_{k''}$, то $\nu_k^{УРГ^P}(C) = \nu_k(C) = \nu|_{N_k}(C) = \nu(C)$. Следовательно, в силу произвольного выбора k, PG-значение ξ удовлетворяет КЭВС. Более того, из (10) и из определения $УРГ_k^P$-игры $\nu_k^{УРГ^I}$ следует, что

$$\sum_{i \in N_k} \xi_i(\nu, P, L_P) = УРГ_k^P(\nu_{PL}, L_M) \text{ для всех } k \in M : N_k \notin N_k / L_k.$$

Отметим теперь, что на $\bar{G}_N^{УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}}$ последнее равенство, вследствие только что доказанной КЭВС и справедливости равенства (9), выполняется также и при всех $k \in M$, для которых $N_k \notin N_k / L_k$. Действительно, для любого $k \in M$, при котором $N_k \notin N_k / L_k$,

$$\sum_{i \in N_k} \xi_i(v, P, L_P) = \sum_{C \in N_k / L_k} \sum_{i \in C} \xi_i(v, P, L_P) = \sum_{C \in N_k / L_k} v(C) = УРГ_k^P(v_{PL}, L_M).$$

Таким образом,

$$\sum_{i \in N_k} \xi_i(\nu, P, L_P) = УРГ_k^P(\nu_{PL}, L_M) \text{ для всех } k \in M. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь $K \in M / L_M$. В силу (11),

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in N_k} \xi_i(\nu, P, L_P) = \sum_{k \in K} УРГ_k^P(\nu_{PL}, L_M).$$

Откуда и вследствие компонентной эффективности $УРГ^P$-значения получаем, что PG-значение ξ удовлетворяет КЭУС. Далее, рассмотрим оператор $\psi_P : G_M^{УРГ^P} \to \bar{G}_N^{УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}}$, приписывающий любой G-игре $\langle u, L \rangle \in G_M^{УРГ^P}$ PG-игру $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}}$ так, что $\nu_{PL} = u$ и $L_M = L$. Для любой G-игры $\langle u, L \rangle \in G_M^{УРГ^P}$ и для PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle = \psi_P(u, L)$ из определения ξ^P и равенства (11) вытекает, что для всех $k \in M$,

$$(\xi^P \circ \psi_P)_k(u, L) = \xi_k^P(\nu, P, L_P) = \sum_{i \in N_k} \xi_i(\nu, P, L_P) = УРГ_k^P(\nu_{PL}, L_M).$$

Следовательно, $(\xi^P \circ \psi_P)(u, L) = УРГ^P(\nu_{PL}, L_M)$, т.е. G-значение $\xi^P \circ \psi_P$ удовлетворяет аксиоме $УРГ^P$. Аналогично можно показать, что для каждого $k \in M$ G-значение $\xi_{N_k} \circ \psi_k^{УРГ^P}$ удовлетворяет аксиоме $УРГ^k$.

Из Теоремы 1 вытекает простой алгоритм для вычисления $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M} \rangle$-значения для PG-игр $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}}$:

1. вычисляем $УРГ^P$-значение для промежуточной G-игры $\langle \nu_{PL}, L_M \rangle$;
2. доли $УРГ_k^P(\nu_{PL}, L_M)$, $k \in M$, полученные априорными союзами, распределяем между игроками внутри априрных союзов посредством $УРГ^k$-значений в соответствующих G-играх внутри априорных союзов $\langle \nu_k^{УРГ^P}, L_k \rangle$.

Пример 1. Рассмотрим пример вычисления $\langle НЭ, \underbrace{КС, \ldots, КС}_{m} \rangle$-значения ξ для PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle$ с графической структурой $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k \in M} \rangle$, задаваемой линейным графом L_M и неориентированными деревьями L_k, $k \in M$. Как это будет видно далее в разделе 7, $\langle НЭ, \underbrace{КС, \ldots, КС}_{m} \rangle$-значение может рассматриваться в качестве разумного решения для игры реки с множественными участниками.

Предположим, что N содержит 6 игроков, игра ν определена следующим образом:

$\nu(\{i\}) = 0$, для всех $i \in N$;
$\nu(\{2,3\}) = 1$, $\nu(\{4,5\}) = \nu(\{4,6\}) = 2.8$, $\nu(\{5,6\}) = 2.9$,
иначе $\nu(\{i,j\}) = 0$, для всех $i, j \in N$;
$\nu(\{1,2,3\}) = 2$, $\nu(\{1,2,3,i\}) = 3$, для $i = 4, 5, 6$;
иначе $\nu(S) = 0$ при $|S| \geqslant 3$;

а коалиционная и графическая структуры заданы на Рис. 2.

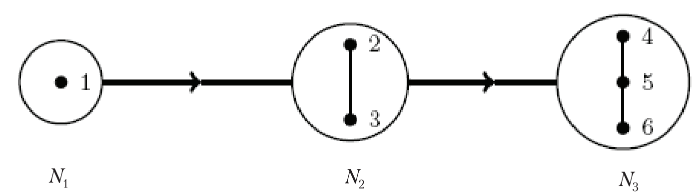

Рис. 2. Коалиционная и графическая структуры к Примеру 1

В рассматриваемом примере $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$;
$N_1 = \{1\}$, $N_2 = \{2,3\}$, $N_3 = \{4,5,6\}$; $L_1 = \varnothing$, $L_2 = \{\{2,3\}\}$, $L_3 = \{\{4,5\}, \{5,6\}\}$;
$M = \{1,2,3\}$; $L_M = \{(1,2),(2,3)\}$;
промежуточная игра ν_{PL}:
$\nu_{PL}(\{1\}) = 0$, $\nu_{PL}(\{2\}) = 1$, $\nu_{PL}(\{3\}) = 3$,
$\nu_{PL}(\{1,2\}) = 2$, $\nu_{PL}(\{2,3\}) = 5$, $\nu_{PL}(\{1,3\}) = 4$, $\nu_{PL}(\{1,2,3\}) = 6$;
ограниченная промежуточная игра $\nu_{PL}^{L_M}$:

$\nu_{PL}^{L_M}(\{1\}) = 0$, $\nu_{PL}^{L_M}(\{2\}) = 1$, $\nu_{PL}^{L_M}(\{3\}) = 3$,

$\nu_{PL}^{L_M}(\{1,2\}) = 2$, $\nu_{PL}^{L_M}(\{2,3\}) = 5$, $\nu_{PL}^{L_M}(\{1,3\}) = \nu_{PL}^{L_M}(\{1\}) + \nu_{PL}^{L_M}(\{3\}) = 3$,

$\nu_{PL}^{L_M}(\{1,2,3\}) = 6$;

игры ν_k внутри априорных союзов N_k, $k = 1, 2, 3$:

$\nu_1(\{1\}) = 0$

$\nu_2(\{2\}) = \nu_2(\{3\}) = 0$, $\nu_2(\{2,3\}) = 1$;

$\nu_3(\{4\}) = \nu_3(\{5\}) = \nu_3(\{6\}) = 0$, $\nu_3(\{4,5\}) = \nu_3(\{4,6\}) = 2.8$; $\nu_3(\{5,6\}) = 2.9$, $\nu_3(\{4,5,6\}) = 3$;

ограниченные игры $\nu_k^{L_k}$ внутри априорных союзов N_k, $k = 1, 2, 3$:

$\nu_1^{L_1}(\{1\}) = 0$;

$\nu_2^{L_2}(\{2\}) = \nu_2^{L_2}(\{3\}) = 0, \nu_2^{L_2}(\{2,3\}) = 1$;

$\nu_3^{L_3}(\{4\}) = \nu_3^{L_3}(\{5\}) = \nu_3^{L_3}(\{6\}) = 0, \nu_3^{L_3}(\{4,5\}) = 2{,}8, \nu_3^{L_3}(\{4,6\}) = 0$,

$\nu_3^{L_3}(\{5,6\}) = 2{,}9, \nu_3^{L_3}(\{4,5,6\}) = 3$.

В соответствии с приведенным выше алгоритмом, PG-значение ξ может быть получено в результате нахождения нижнеэквивалентного решения для промежуточной G-игры с линейной графической структурой $\langle \nu_{PL}, L_M \rangle$ и затем перераспределения платежей $НЭ_k\langle \nu_{PL}, L_M \rangle, k = 1, 2, 3$ полученных априорными союзами, среди их участников в соответствии с решением усредненного дерева в G-играх без циклов $\langle \nu_k^{УРГ^P}, L_k \rangle$ внутри априорных союзов, т.е. для всех $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $\xi_i(\nu, P, L_P) = УД_i\left(\nu_{k(i)}^{НЭ}, L_{k(i)}\right)$. Несложные вычисления показывают, что

$$НЭ_1(\nu_{PL}, L_M) = \nu_{PL}^{L_M}(\{1,2,3\}) - \nu_{PL}^{L_M}(\{2,3\}) = 1;$$

$$НЭ_2(\nu_{PL}, L_M) = \nu_{PL}^{L_M}(\{2,3\}) - \nu_{PL}^{L_M}(\{3\}) = 2;$$

$$НЭ_3(\nu_{PL}, L_M) = \nu_{PL}^{L_M}(\{3\}) = 3;$$

$$УД_1(\nu_1^{НЭ}, L_1) = НЭ_1 = 1,$$

$$УД_2(\nu_2^{НЭ}, L_2) = \left[\left[НЭ_2 - \nu_2(\{3\})\right] + \nu_2(\{2\})\right]/2 = (2+0)/2 = 1,$$

$$УД_3(v_2^{НЭ}, L_2) = \left[v_2(\{3\}) + \left[НЭ_2 - v_2(\{2\})\right]\right]/2 = (0+2)/2 = 1,$$

$$УД_4(v_3^{НЭ}, L_3) = \left[\left[НЭ_3 - v_3(\{5,6\})\right] + v_3(\{4\}) + v_3(\{4\})\right]/3 =$$

$$= \left[(3-2.9) + 0 + 0\right]/3 = \frac{1}{30},$$

$$УД_5(v_3^{НЭ}, L_3) = \left[\left[v_3(\{5,6\}) - v_3(\{6\})\right] + \left[НЭ_3 - v_3(\{4\}) - v_3(\{6\})\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\nu_3(\{4,5\}) - \nu_3(\{4\})\right]\right]/3 = (2{,}9 + 3 + 2{,}8)/3 = 2\frac{27}{30},$$

$$УД_6(\nu_3^{НЭ}, L_3) = \left[\nu_3(\{6\}) + \nu_3(\{6\}) + \left[НЭ_3 - \nu_3(\{4,5\})\right]\right]/3 =$$

$$= \left[0 + 0 + (3 - 2.8)\right]/3 = \frac{2}{30}.$$

Таким образом, $\xi(\nu, P, L_P) = \left(1, 1, 1, \frac{1}{30}, 2\frac{27}{30}, \frac{2}{30}\right)$.

Как уже отмечалось в Замечании 1, PG-игры $\langle \nu, \langle N \rangle, L_{\langle N \rangle} \rangle$ и $\langle \nu, \{N\}, L_{\{N\}} \rangle$ совпадают с G-игрой $\langle \nu, L_N \rangle$. Откуда следует, что любое $\langle C^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle$-значение в PG-игре $\langle \nu, \langle N \rangle, L_{\langle N \rangle} \rangle$ и любое $\langle УРГ^P, \{C^k\}_{k\in M} \rangle$-значение в PG-игре $\langle \nu, \{N\}, L_{\{N\}} \rangle$ совпадает со значением Майерсона в G-игре $\langle \nu, L_N \rangle$; более того, если граф L_N полный, они также совпадают с вектором Шепли и значением Оуэна. Теперь заметим, что в любой PG-игре $\langle \nu, P, L_P \rangle$ с произвольной коалиционной структурой P в случае, когда граф L_M пустой, а все графы L_k, $k \in M$ полные, т.е. $L_k = L_{N_k}^c$, любое $\langle УРГ^P, \underbrace{C, \dots, C}_{m} \rangle$-значение совпадает со значением Аумана-Дрезе в P-игре $\langle \nu, P \rangle$. Однако, $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle$-значение в любой PG-игре $\langle \nu, P, L_P \rangle$ с произвольной нетривиальной коалиционной структурой P никогда не совпадает со значением Оуэна (и, следовательно, также со значением Васкез-Браге, Гарсия-Юрадо и Каррераса [13]), потому что в предложенной модели не допускается никакая кооперация между собственной подкоалицией любого из априорных союзов с игроками из других союзов. Напротив, в случае Оуэна предполагается кооперация собственной подкоалиции одного из априорных союзов с другими целыми союзами, а именно, в модели Оуэна предполагается, что любая собственная подкоалиция любого выбранного априорного союза может представлять этот союз на переговорах с другими полными априорными союзами.

C-устойчивость

Теорема 2. *Если все рассматриваемые УРГ аксиомы являются одного из типов КС, НЭ, ВЭ, РП, ПоЭ, ПрЭ, то* $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle$*-значение в любой супераддитивной PG-игре* $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \overline{G}_N^{УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M}}$ *принадлежит C-ядру, т.е.* $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle(\nu, P, L_P) \in C(\nu, P, L_P)$.

Отметим, что в условиях Теоремы 2 все рассматриваемые решения являются комбинациями решения усредненного дерева для G-игр с графом без циклов, нижнеэквивалентного и верхнеэквивалентного решений и решения равных потерь для G-игр с линейным графом.

Доказательство.

В [7] показано, что решение усредненного дерева для супераддитивных G-игр с графом без циклов является селектором C-ядра. Принадлежность C-ядру нижнеэквивалентного и верхнеэквивалентного решений и решения равных потерь для супераддитивных G-игр с линейным графом установлено в [4]. Аналогичный результат для значения дерева в супераддитивных G-играх с деревом с корнем и для значения стока в супераддитивных G-играх с деревом стока получено в [8]. В супераддитивной PG-игре $\langle \nu, P, L_P\rangle$ промежуточная игра ν_{PL} и игры ν_k, $k \in M$, внутри априорных союзов также являются супераддитивными. Следовательно,

$$УРГ^P(\nu_{PL}, L_M) \in C(\nu_{PL}, L_M), \tag{12}$$

$$УРГ^k(\nu_k, L_k) \in C(\nu_k, L_k) \text{ для всех } k \in M : n_k > 1. \tag{13}$$

Из (12) и связности всех одноточечных коалиций, получаем

$$УРГ^P_k(\nu_{PL}, L_M) \geqslant \nu_{PL}(\{k\})\, \nu_k^{L_k}(N_k) \text{ для всех } k \in M : n_k > 1.$$

Отметим, что если $N_k \in N_k / L_k$, то игры $\nu_k^{L_k}$ и ν_k совпадают. Тогда вследствие последнего неравенства $УРГ^P_k$-игра $\nu_k^{УРГ^P k}$ тоже является супераддитивной. Следовательно,

$$УРГ^k\left(\nu_k^{УРГ^P}, L_k\right) \in C\left(\nu_k^{УРГ^P}, L_k\right), \forall k \in M : n_k > 1.\ N_k \in N_k / L_k. \tag{14}$$

Если $N_k \notin N_k / L_k$, то из определения C-ядра для G-игр следует, что $C\left(\nu_k^{УРГ^P}, L_k\right) = C(\nu_k, L_k)$. Кроме того, если $N_k \notin N_k / L_k$, то из определений решения усредненного дерева для G-игр с графом без циклов, нижнеэквивалентного и верхнеэквивалентного решений и решения равных потерь для G-игр с линейным графом, а также решений дерева и стока для G-игр с деревом с корнем или деревом стока соответственно, вытекает, что $УРГ^k\left(\nu_k^{УРГ^P}, L_k\right) = УРГ^k(\nu_k, L_k)$. Откуда вместе с предыдущим равенством, а также вследствие (14) и (13) получаем

$$УРГ^k\left(\nu_k^{УРГ^P}, L_k\right) \in C\left(\nu_k^{УРГ^P}, L_k\right) \text{ для всех } \forall k \in M : n_k > 1. \tag{15}$$

Как показано в части II доказательства Теоремы 1 (равенство (11)), вектор

$$\left\langle УРГ^P, \left\{УРГ^k\right\}_{k \in M}\right\rangle^P (\nu, P, L_P) = \left\{\sum_{i \in N_k} \left\langle УРГ^P, \left\{УРГ^k\right\}_{k \in M}\right\rangle_i (\nu, P, L_P)\right\}_{k \in M}$$

является $УРГ^P$-значением в промежуточной G-игре $\langle \nu_{PL}, L_M\rangle$. Следовательно в силу (12),

$$\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}\rangle^P (\nu, P, L_P) \in C(\nu_{PL}, L_M). \tag{16}$$

Далее, из (3) следует, что

$$\left\langle УРГ^P, \left\{УРГ^k\right\}_{k \in M}\right\rangle\Big|_{N_k} (\nu, P, L_P) = УРГ^k\left(\nu_k^{УРГ^P}, L_k\right), \forall k \in M : n_k > 1.$$

Откуда вместе с (15) получаем, что

$$\left\langle УРГ^P, \left\{УРГ^k\right\}_{k \in M}\right\rangle\Big|_{N_k} (\nu, P, L_P) \in C\left(\nu_k^{УРГ^P}, L_k\right), \forall k \in M : n_k > 1. \tag{17}$$

Вследствие Утверждения 1, отношения (16) и (17) обеспечивают включение $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}\rangle(\nu, P, L_P) \in C(\nu, P, L_P)$.

Вернемся опять к приведенному выше Примеру 1 и покажем, что он также иллюстрирует утверждение Теоремы 2. Прежде всего заметим, что рассматриваемая игра 6 лиц ν супераддитивна и вектор платежей $\xi(\nu, P, L_P) = \langle НЭ, КС, КС, КС\rangle(\nu, P, L_P)$ принадлежит C-ядру $C(\nu, P, L_P)$. Однако при этом оказывается, что вектор платежей $\phi(\nu, P, L_P) = \langle C, C, C, C\rangle(\nu, P, L_P)$, являющийся комбинация значений Майерсона, т.е. $\phi_i(\nu, P, L_P) = \mu_i(\nu^{\mu}_{k(i)}, L_{k(i)})$, $i \in N$, не принадлежит C-ядру $C(\nu, P, L_P)$. Действительно, нетрудно видеть, что

$$\mu(\nu_{LP}, L_M) = (0.5, 2, 3.5),\ \phi(\nu, P, L_P) = \left(0.5, 1, 1, \frac{2}{3}, 2\frac{7}{60}, \frac{43}{60}\right).$$

Но, вследствие неравенства $\phi_4 + \phi_5 = 2\frac{47}{60} < \nu_3^{L_3}\left(\{4,5\}\right) = 2.8 = 2\frac{48}{60}$ мы имеем $\phi_{N_3} \notin C\left(\nu_3^{\mu}, L_3\right)$. Следовательно, в силу Утверждения 1 вектор платежей $\phi(\nu, P, L_P)$ не принадлежит C-ядру $C(\nu, P, L_P)$.

Следующие две теоремы являются следствиями Теоремы 2.

В силу Утверждения 1, свойство вектора платежей $x \in \Re^n$ принадлежать C-ядру $C(\nu, P, L_P)$ включает в себя более слабые условия обеих аксиом КЭУС и КЭВС (см. формулу (1), определяющую $C(\nu, P, L_P)$). Отсюда вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. *Если все рассматриваемые УРГ аксиомы являются одного из типов КС, НЭ, ВЭ, РП, ПоЭ, ПрЭ, то* $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}\rangle$*-значение в любой супераддитивной PG-игре* $\langle \nu, P, L_P\rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}}$ *является единственным селектором C-ядра, удовлетворяющим (m+1)-набору аксиом* $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}\rangle$.

Рассмотрим теперь супераддитивную PG-игру $\langle \nu, P, L_P \rangle$, в которой любой из графов, определяющих кооперативную структуру $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k\in M} \rangle$, либо линейный, дерево с корнем или дерево стока, либо является произвольным неориентированным графом без циклов, и, кроме того, все графы внутри априорных союзов L_k, $k\in M$, связны, т.е. фактически предполагается что все графы L_k, $k\in M$, являются деревьями, ориентированными или неориентированными, возможно линейными. Тогда всегда найдется $(m+1)$-набор аксиом $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle$, состоящий из аксиом одного из типов КС, НЭ, ВЭ, РП, ПоЭ, или ПрЭ, для которого графическая структура $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k\in M} \rangle$ допустима. Однако, если не все графы L_k, $k\in M$ связны, в общем случае нельзя гарантировать совместность графической структуры внутри априорных $\{L_k\}_{k\in M}$ с векторм платежей $УРГ^P(\nu_{PL}, L_M)$, в промежуточной G-игре. Если же все графы L_k, $k\in M$, связны, то в силу Замечания 4, из справедливости Теоремы 2 следует, что $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle(\nu, P, L_P) \in C(\nu, P, L_P)$.

Теорема 4. *В любой супераддитивной PG-игре* $\langle \nu, P, L_P \rangle \in \overline{G}_N^{УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M}}$ $\langle \nu, P, L_P \rangle$, *в которой все графы, определяющие кооперативную структуру* $L_P = \langle L_M, \{L_k\}_{k\in M} \rangle$, *являются либо линейными, деревьями с корнем или деревьями стока, либо произвольными неориентированными графами без циклов и все графы внутри априорных союзов* L_k, $k\in M$, *связны, C-ядро* $C(\nu, P, L_P)$ *непусто.*

Распределение дивидендов

Рассмотрим теперь, как различные $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle$-значения распределяют дивиденды коалиций между их участниками. Так как значение любой коалиции равняется сумме дивидендов самой коалиции и всех ее собственных подкоалиций, дивиденд коалиции имеет естественную интерпретацию экстра дохода этой коалиции, который члены коалиции не могли реализовать, оставаясь только внутри ее собственных подкоалиций. Как то или иное рассматриваемое значение распределяет дивиденд коалиции между ее участниками, является важной информацией о заинтересованности различных игроков в образовании коалиции. Эта информация особенно существенна для игр с ограниченной кооперацией, когда может оказаться, что один игрок (или группа игроков) ответственен за формирование коалиции. В этом случае, если игрок, от которого зависит формирование коалиции, не получает хотя бы части от дивиденда формируемой коалиции, он может просто заблокировать ее создание. Такое встречается, например, с некоторыми G-значениями для G-игр с линейной графической структурой; обсуждение этих ситуаций приводится в работе Бринка, Лаана и Васильева [4].

В PG-играх допустимы только два типа коалиций, а именно, коалиции полных априорных союзов и подкоалиции априорных союзов. Как следует из Теоремы 1, каждое $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle$-значение является комбинацией $УРГ^P$-значения в промежуточной G-игре $\langle \nu_{PL}, L_M \rangle$ и $УРГ^k$-значений в соответствующих G-играх внутри априорных союзов $\left\langle \nu_k^{УРГ^P}, L_k \right\rangle$, $k\in M$. Следовательно, любое $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k\in M} \rangle$-значение распределяет дивиденд коалиций, состоящих из полных априорных союзов, в соответствии с $УРГ^P$-значением, а дивиденды подкоалиций априорных союзов в соответствии с соответствующими $УРГ^k$-значениями.

6. Обобщение на игры с уровневыми структурами

В работе Винтера [15] приводится обобщение значения Оуэна на игры с уровневыми структурами. *Уровневая структура* является конечной последовательностью разбиений $\Lambda = (P_1, ..., P_q)$ множества игроков N, таких что каждое предыдущее разбиение P_r является утончением последующего P_{r+1}, т.е. если $S\in P_r$, то $S\subset T$ для некоторого $T\in P_{r+1}$. Для любой коалиционной структуры P_r, $r=1,...,q$, через m_r обозначим число элементов (априорных союзов) в P_r, и положим $M_r = \{1,...,m_r\}$. В дальнейшем элементы коалиционной структуры P_r, $r=1,...,q$, будем обозначать через N_{k_r}, $k_r\in M_r$, т.е. $P_r = \left\{N_{k_r}\right\}_{k_r\in M_r}$, $r=1,...,q$.

Графические игры с коалиционной структурой, PG-игры, допускают естественное обобщение на графические игры с уровневой структурой. Для игр с уровневой структурой предполагается, что кооперация возможна только между отдельными игроками внутри априорных союзов N_{k_1}, $k_1\in M_1$, на первом уровне, или на любом из уровней $r=1,...,q-1$ между априорными союзами одного уровня N_{k_r} $N_{k_r}, N_{l_r} \in P_r$, $k_r, l_r\in M_r$, которые одновременно принадлежат одному и тому же априорному союзу в коалиционной стркутуре на следующем уровне, т.е. $N_{k_r}, N_{l_r} \subset N_{k_{r+1}} \in P_{r+1}$, или среди любых априорных союзов на верхнем уровне q. Отметим, что никакая кооперация между элементами уровневой структуры, находящимися на разных уровнях, не допускается. Кроме того следует подчеркнуть, что когда речь идет о кооперации между априорными союзами, априорные союзы рассматриваются как цельные объекты, а не как наборы отдельных участников или меньших подсоюзов, входящих в состав коалиционных структур более низких уровней. Кооперативная структура в этой ситуации может быть представлена посредством графической структуры $L_\Lambda = \left\langle L_{M_q}, \left\{ \left\{ L_{k_r} \right\}_{k_r \in M_r} \right\}_{r=1}^{q-1} \right\rangle$, где граф L_{M_q} задает связи между априорными союзами N_{k_q}, $k_q \in M_q$, как отдельными элементами коалиционной структуры P_q на верхнем уровне q; каждый граф L_{k_r}, $k_r \in M_r$, $r=2,...,q$, определяет связи между априорными союзами как отдельными элементами коалиционной структуры P_{r-1} на уровне $r-1$, которые принадлежат одному и тому же априорному союзу L_{k_r} на уровне r; и графы L_{k_1}, $k_1 \in M_1$, связывают отдельных игроков внутри априорных союзов N_{k_1}, $k_1 \in M_1$, на первом уровне. Рис. 3 иллюстрирует возможный пример 2-уровневой уровневой структуры, наделенной графической структурой, зависящей в свою очередь от уровневой структуры.

Комбинация ТП игры с уровневой структурой и с ограниченными кооперативными возможностями, представленными посредством гра-

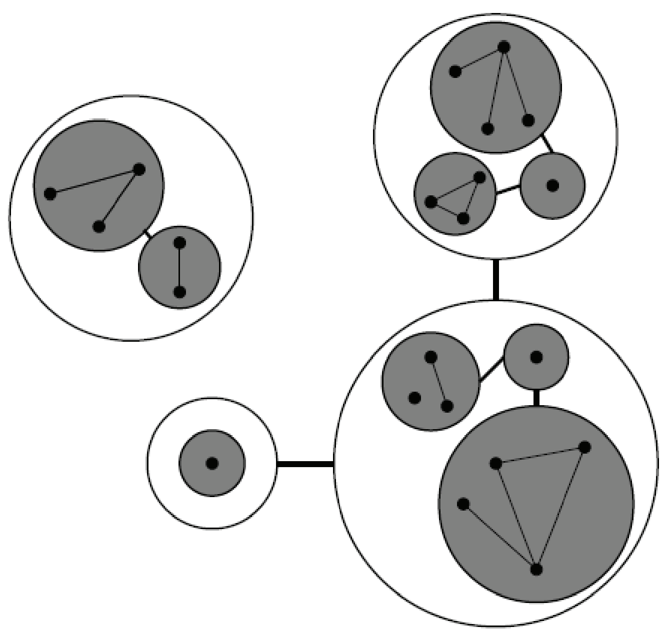

Рис. 3. 2-уровневая графическая структура

фической структуры, в свою очередь зависящей от уровневой структуры, определяет так называемую *графическую игру с уровневой структурой* (*LG-игру*), задаваемую набором $\langle \nu, \Lambda, L_\Lambda \rangle$. Аналогично PG-играм, в LG-играх графическая структура L_Λ зависит от уровневой структуры Λ только с точностью до фиксации вершин графов в соответствии с коалиционными структурами P_r, $r=1,...,q$. Отметим, что в этом контексте любая PG-игра $\langle \nu, P, L_P \rangle$ является LG-игрой $\langle \nu, \Lambda, L_\Lambda \rangle$ с одноуровневой структурой $\Lambda = (P)$.

LG-значением называется оператор, приписывающий любой LG-игре $\langle \nu, \Lambda, L_\Lambda \rangle$ вектор платежей $\xi(\nu, \Lambda, L_\Lambda) \in \Re^n$.

Распространим приведенный выше подход к PG-значениям на LG-значения. Начнем с адаптации аксиом компонентной эффективности КЭУС и КЭВС на случай LG-значений. Прежде всего введем некоторые дополнительные обозначения. Для любого $r=2,...,q-1$ и $k_r \in M_r$ положим $P_{r-1}^{k_r} = \left\{ N_{k_{r-1}} \in P_{r-1} \mid N_{k_{r-1}} \subseteq N_{k_r} \right\}$, $M_{r-1}^{k_r} = \left\{ k_{r-1} \in M_{r-1} \mid N_{k_{r-1}} \subseteq N_{k_r} \right\}$, и определим игру $\upsilon_{r-1}^{k_r}$ на множестве игроков $M_{r-1}^{k_r}$ следующим образом: пусть $\nu_1^{k_2} = \nu|_{N_{k_2}}$, а при $r=3,...,q-1$,

$$\nu_{r-1}^{k_r}(Q) = \begin{cases} \nu_{PL}^{r-2,k_{r-1}}\left(N_{k_r(k_{r-1})}\right), & Q = \left\{k_r(k_{r-1})\right\}, \\ \nu\left(\bigcup_{k \in Q} N_k\right), & |Q| > 1, \end{cases} \quad \text{для любого } Q \subseteq M_{r-1}^{k_r},$$

где ν_{PL}^{r-1,k_r} является промежуточной G-игрой в PG-игре $\left\langle \nu_{r-1}^{k_r}, P_{r-1}^{k_r}, \left\langle L_{k_r}, \left\{ L_{k_{r-1}} \right\}_{k_{r-1} \in M_{r-1}^{k_r}} \right\rangle \right\rangle$, и игру ν_q на множестве игроков M_q:

$$\nu_q(Q) = \begin{cases} \nu_{PL}^{q-2,k_{q-1}}\left(N_{k_q(k_{q-1})}\right), & Q = \left\{k_q(k_{q-1})\right\}, \\ \nu\left(\bigcup_{k \in Q} N_k\right), & |Q| > 1, \end{cases} \quad \text{для любого } Q \subseteq M_q,$$

где ν_{PL}^q является промежуточной G-игрой в PG-игре $\left\langle \nu_q, P_q, \left\langle L_{M_q}, \left\{ L_{k_q} \right\}_{k_q \in M_q} \right\rangle \right\rangle$.

LG-значение ξ *компонентно эффективно по отношению к уровневой структуре* (УКЭ), если для любой LG-игры $\langle \nu, \Lambda, L_\Lambda \rangle$, $L_\Lambda = \left\langle L_{M_q}, \left\{ \left\{ L_{k_r} \right\}_{k_r \in M_r} \right\}_{r=1}^{q-1} \right\rangle$,

(i) для всех $k_1 \in M_1$ и любой компоненты $C \in N_{k_1} / L_{k_1}, C \neq N_{k_1}$,

$$\sum_{i \in C} \xi_i(\nu, \Lambda, L_\Lambda) = \nu(C),$$

(ii) для любого уровня $r = 2, ..., q-1$, для всех $k_r \in M_r$ и любой компоненты $C \in N_{k_r} / L_{k_r}, C \neq N_{k_r}$,

$$\sum_{k_r \in C} \sum_{i \in N_{k_r}} \xi_i(\nu, \Lambda, L_\Lambda) = \nu_{PL}^{r-1, k_r}(C),$$

(iii) для любой компоненты $C \in M_q / L_{M_q}$,

$$\sum_{k_q \in C} \sum_{i \in N_{k_q}} \xi_i(\nu, \Lambda, L_\Lambda) = \nu_{PL}^{q}(C).$$

Отметим, что если для PG-игр рассматривались две аксиомы компонентной эффективности КЭУС и КЭВС, то для LG-игр с не менее чем двумя уровнями имеется три условия компонентной эффективности. Это является следствием того, что графические структуры внутри априорных союзов на промежуточных уровнях $r = 2, ..., q-1$ обладают чертами обеих графических структур, как графической структуры внутри априорных союзов, содержащей отдельных игроков, на первом уровне, так и графической структуры между априорными союзами на верхнем уровне. Нетрудно видеть, что для PG-игры $\langle \nu, P, L_P \rangle$ $\langle \nu, P, L_P \rangle$, представленной посредством LG-игры $\langle \nu, \Lambda, L_\Lambda \rangle$ с одноуровневой уровневой структурой, условия (i) и (iii) в аксиоме УКЭ совпадают с аксиомами КЭВС и КЭУС соответственно.

Нетрудно видеть, что набор аксиом $\left\langle УРГ^{P_q}, \left\{ \{УРГ^{k_r}\}_{k_r \in M_r} \right\}_{r=1}^{q-1} \right\rangle$ может применяться к LG-значению аналогично тому, как это было предложено выше для $(m+1)$-набора аксиом $\langle УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M} \rangle$ по отношении к PG-значению.

Чтобы гарантировать полное распределение доходов каждого из априорных союзов на вышележащих уровнях среди элементов коалиционных структур на уровнях, лежащих ниже, подобно PG-играм пред-полагается, что графические структуры внутри априорных союзов $\{L_{k_r}\}_{k_r \in M_r}$, $r = 1, ..., q-1$, совместны с векторами платежей в соответствующих промежуточных G-играх. Для любого набора аксиом $\left\langle УРГ^{P_q}, \left\{ \{УРГ^{k_r}\}_{k_r \in M_r} \right\}_{r=1}^{q-1} \right\rangle$ определим множество LG-игр $\bar{G}_N^{УРГ^{P_q}, \left\{ \{УРГ^{k_r}\}_{k_r \in M_r} \right\}_{r=1}^{q-1}}$ по аналогии с множеством PG-игр $\bar{G}_N^{УРГ^P, \{УРГ^k\}_{k \in M}}$.

Теорема 5. *Существует единственное LG-значение, определенное на* $\bar{G}_N^{УРГ^{P_q}, \left\{ \{УРГ^{k_r}\}_{k_r \in M_r} \right\}_{r=1}^{q-1}}$, *которое удовлетворяет аксиомам УКЭ и* $\left\langle УРГ^{P_q}, \left\{ \{УРГ^{k_r}\}_{k_r \in M_r} \right\}_{r=1}^{q-1} \right\rangle$, *и для любой LG-игры* $\langle \nu, \Lambda, L_\Lambda \rangle \in \bar{G}_N^{УРГ^{P_q}, \left\{ \{УРГ^{k_r}\}_{k_r \in M_r} \right\}_{r=1}^{q-1}}$ *оно задается равенством*

$$\xi_i(\nu, \Lambda, L_\Lambda) = УРГ_i^{k_1(i)}\left(\nu_{k_1(i)}^{УРГ^{k_2(i)}}, L_{k_1(i)} \right), \text{ для всех } i \in N,$$

где для всех $r = 2, ..., q-1$, *для любого* $S \subseteq N_{k_{r-1}(i)}$,

$$\nu_{k_{r-1}(i)}^{УРГ^{k_r(i)}}(S) = \begin{cases} УРГ_{k_r(i)}^{k_r(i)}\left(\nu_{k_r(i)}^{УРГ^{k_{r+1}(i)}}, L_{k_r(i)} \right), & S = N_{k_{r-1}(i)}, \\ \nu_{PL}^{r-1, k_{r-1}(i)}(S), & S \neq N_{k_{r-1}(i)}, \end{cases}$$

и для всех $S \subseteq N_{k_{q-1}(i)}$,

$$\nu_{k_{q-1}(i)}^{УРГ^{k_q(i)}}(S) = \begin{cases} УРГ_{k_q(i)}^{P}\left(\nu_{PL}^{q}, L_{M_q} \right), & S = N_{k_{q-1}(i)}, \\ \nu_{PL}^{q-1, k_{q-1}(i)}(S), & S \neq N_{k_{q-1}(i)}. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 5 является прямым обобщением доказательства Теоремы 1, и мы оставляем его в качестве упражнения для внимательного читателя.

Следует отметить, что Теоремы 2-4 для PG-игр также допускают естественные обобщения на случай LG-игр.

7. Распределение водных ресурсов реки

В своей работе [1], Амбек и Спрумон применяют теоретико-игровой подход к решению проблемы оптимального распределения водных ресурсов реки среди агентов (различных стран), расположенных вдоль ее русла. В предложенной модели предполагается, что между любыми двумя соседними агентами имеется дополнительный приток воды. Вообще говоря, каждый пользователь имеет право использовать весь объем воды, получаемый от своего предшественника, расположенного выше по течению. Однако с точки зрения суммарной общественной полезности, такое распределение воды в общем случае не является оптимальным. Для получения более эффективного распределения, в модели Амбека-Спрумона допускается возможность перераспределения части воды пользователям, расположенным ниже по течению, которые в свою очередь компенсируют получение дополнительной воды посредством побочных платежей пользователям, расположенным выше. В работе Бринка, Лаана и Васильева [4] показывается, что игра реки Амбека-Спрумона естественным образом вкладывается в рамки моделей G-игр с линейной графической структурой. В обеих упомянутых выше работах река рассматривается с одним источником и без дельты, и предполагается, что каждый агент состоит из одного пользователя. Нашей целью является обобщение этой модели на случай реки с множественными истоками и дельтой в предположении, что каждый агент представляет из себя целое сообщество пользователей. Однако при этом, никакая кооперация между отдельными пользователями или собственными подкоалициями различных агентов, расположенных на разных уровнях вдоль русла реки, не допускается, т.е. возможность наличия международных фирм, имеющих свои подразделения на различных уровнях вдоль течения, не предусматривается.

Предположим, что $\mathrm{N} = \cup_{k \in M} N_k$, $N_k \cap N_l = \varnothing$, $k, l \in M$, $k \neq l$, определяет множество игроков (пользователей воды), состоящее из сообществ N_k, $k \in M$, расположенных вдоль реки и пронумерованных последовательно сверху вниз. Пусть $e_k \geqslant 0$, $k \in M$ и сообщество пользователей N_l является непосредственным предшественником сообщества N_k, задает величину притока воды перед наиболее высоко расположенным сообществом пользователей N_1 (в этом случае $l = 0$) или втекающего между последовательными соседями N_l и N_k перед сообществом N_k. Кроме того, будем полагать, что каждое сообщество пользователей оборудовано связным трубопроводом, соединяющим всех его членов. Не умаляя общности можно считать, что все графы L_k, $k \in M$, определяющие структуры трубопроводов внутри сообществ N_k, не содержат циклов. В противном случае всегда возможно перекрыть некоторые трубы, ответственные за образование циклов. Действительно, в любом графе с циклами всегда можно рассмотреть конечное множество подграфов без циклов, имеющих тот же набор вершин, что и исходный граф. Из полученного множества подграфов можно всегда без труда выбрать один, исходя из минимизации технологических расходов на транпортировку воды внутри сообщества. Схематическое представление рассматриваемой модели приведено на Рис. 4, Рис. 5, Рис. 6.

Следуя Амбеку и Спрумону [1], будем далее предполагать, что для каждого сообщества N_k имеется квазилинейная функция полезности,

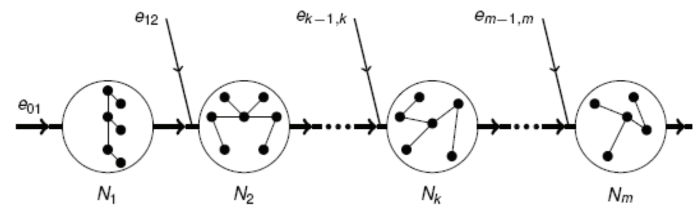

Рис. 4. Линейная модель реки

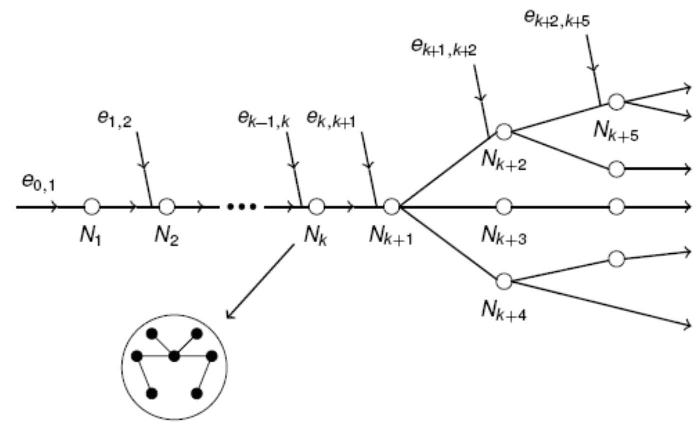

Рис. 5. Модель реки с дельтой

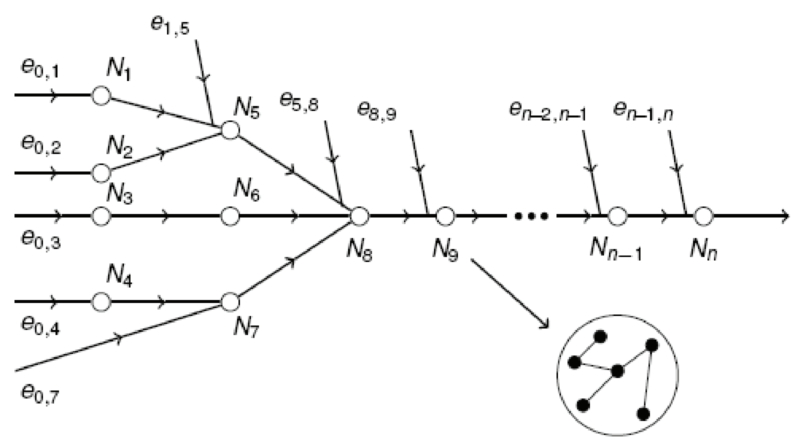

Рис. 6. Модель реки с множественными истоками

представляющая суммарную полезность всех его членов и задаваемая в виде функции $u^k(x_k,t_k)=b^k(x_k)+t_k$, где x_k объем воды, потребляемой сообществом N_k, $b^k:\Re_+\to\Re$ непрерывная невозрастающая функция, определяющая полезность, получаемую сообществом N_k от потребления воды в объеме x_k, а t_k денежная компенсация сообществу N_k. Далее, будем предполагать, что если суммарные доли воды, получаемые сообществами N_k, $k\in M$, фиксированы, то для каждого сообщества N_k имеется механизм оптимального распределения воды среди его членов, представленный в форме ТП игры ν_k. Мы не будем останавливаться на вопросе построения игр ν_k и оставим его за пределами рамок этой работы.

В рассматриваемой модели никакая кооперация между отдельными пользователями, расположенными на разных уровнях, не допускается. Как следствие этого, задача оптимального распределения воды реки между отдельными пользователями вкладывается в рамки приведенной выше модели PG-игры. Решениями этой PG-игры реки являются PG-значения, которые в свою очередь оказываются комбинациями решений для G-игры реки между отдельными сообществами пользователей с графической структурой, определямой соответственно линейным графом в случае линейной модели, деревом с корнем для реки с дельтой, и деревом стока для игры с множественными истоками, и решений для игр с графами без циклов внутри каждого сообщества. В соответствии с результатами полученными в [1], [4] и [8], G-игра реки $\langle\nu, L\rangle$, в которой граф L соответственно либо линейный, либо является деревом с корнем, либо деревом стока, является супераддитивной. Если все игры ν_k, $k\in M$, определяющие механизм распределения воды среди пользователей внутри сообществ, оказываются тоже супераддитивными, то вследствие полученных выше результатов любое решение, распределяющее воду между сообществами пользователей посредством одного из приведенных выше решений для G-игр с линейной графической структурой, структурой дерева с корнем или дерева стока и дальнейшего распределения воды между отдельными пользователями внутри сообществ посредством решения усредненного дерева, принадлежит C-ядру рассматриваемой PG-игры реки с множественными пользователями. Однако следует отметить, что, как показано в [4], решение игры реки с линейным графом и одиночными позователями, предложенное Амбеком и Спрумоном [1], которое в свою очередь совпадает с вернеэквивалентным решением, является противоречивым с точки зрения распределения дивидендов, так как оно отдает дивиденд любой связной коалиции игроков полностью наиболее нижнему игроку, в то

время как ответственным за образование любой связной коалиции является самый верхний ее член, не получающий в таком случае никакой доли дивиденда. Аналогичная ситуация, как показано в [8], имеет место и для решения стока в случае игры реки с множественными истоками, которое тоже отдает весь дивиденд наиболее нижнему игроку. С позиции разумного распределения дивидендов распределение воды между сообществами пользователей посредством нижнеэквивалентного решения или решения равных потерь в случае реки с линейным графом, а также значение дерева для реки с дельтой представляется более привлекательным.

Литература

1. *Ambec S., Sprumont Y.* Sharing a river // J. Econ. Theory. — 2002. — vol. 107. — pp. 453–462.
2. *Aumann R.J., Drèze J.* Cooperative games with coalitional structures // Int. J. Game Theory. — 1974. — vol. 3. — pp. 217–237.
3. *Borm P., Owen G., Tijs S.* On the position value for communication situations // SIAM J. Discrete Math. — 1992. — vol. 5. — pp. 305–320.
4. *van den Brink R., van der Laan G., Vasil'ev V.* Component efficient solu-tions in line-graph games with applications // Econ. Theory. — 2007.– vol. 33 — pp. 349–364.
5. *Gillies D.B.* Some theorems on *n*-person games // Ph.D. thesis. — 1953. — Princeton University.
6. *Harsanyi J.C.* A bargaining model for cooperative *n*-person games // Contributions to the theory of games IV (eds: Tucker A.W, Luce R.D.) Princeton: Princeton Univ. Press, 1959. — pp. 325–355.
7. *Herings P.J.J., van der Laan G., Talman A.J.J.* The average tree solution for cycle-free graph games // Games and Econ. Behav. — 2008. — vol. 62. — pp. 77–92.
8. *Khmelnitskaya A.B.* Values for rooted-tree and sink-tree digraphs games and shar-ing a river // Theory and Decision. — 2009. — DOI: 10.1007/s11238-009-9141-7. — в печати.
9. *Meessen R.* Communication games, Master's thesis. — 1998. — Dept. of Mathematics, University of Nijmegen, the Netherlands (In Dutch).
10. *Myerson R.B.* Graphs and cooperation in games // Math. Oper. Res. —1977. — vol. 2. — pp. 225–229.
11. *Owen G.* Values of games with a priori unions // Essays in mathema-tical economics and game theory (eds: Henn R., Moeschlin O.) Berlin: Springer-Verlag, 1977. — pp. 76–88.

12. *Shapley L.S.* A value for *n*-person games // Contributions to the theory of games II (eds: Tucker A.W, Kuhn H.W.) Princeton: Princeton Univ. Press, 1953. — pp. 307–317.
13. *Slikker M.* A characterization of the position value // Int. J. Game Theory. — 2005. — vol. 33. — pp. 210–220.
14. *Vázquez-Brage M., García-Jurado I, Carreras F.* The Owen value appli-ed to games with graph-restricted communication // Games and Econ. Behav. – 1996. – vol. 12. – pp. 42–53.
15. *Winter E.* A value for games with level structures // Int. J. Game Theory. – 1989. – vol. 18. – pp. 227–242.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЭГАЛИТАРНЫХ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ АКСИОМЫ НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ ОДИНАКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОЛЕЗНОСТЕЙ

Е.Б. Яновская

Эгалитарные решения задач многокритериальной оптимизации и арбитражных схем характеризуются с помощью аксиомы независимости от одинаковых преобразований индивидуальных полезностей. В теории кооперативных игр такая аксиома неприменима, так как класс кооперативных игр с трансферабельными не замкнут относительно таких преобразований. Приводятся модификации указанной аксиомы, применимые к решениям кооперативных игр, и с их помощью дается новая аксиоматическая характеризация известного эгалитарного решения Дутта–Рэя.

Введение

Почти все известные решения кооперативных игр с трансферабельными полезностями (ТП игры) имеют аксиоматические характеризации в терминах согласованности в том или ином определении. В этом случае к аксиоме согласованности достаточно добавить еще только аксиомы, характеризующие требуемое решение, на классе игр двух лиц. Более того, определение решения для игр двух лиц нередко записывается в виде аксиомы. Именно такими системами аксиом были охарактеризованы наиболее популярные решения: значение Шепли и пред *n*-ядро. На классе игр двух лиц эти решения совпадают со стандартным решением, которое делит поровну прибыль или убыток, общие для обоих игроков. Значение Шепли является согласованным в определении Харта и Мас-Колелла, а пред *n*-ядро согласовано в определении Дэвиса–Машлера. Само стандартное решение на классе игр двух лиц полностью определяется аксиомами эффективности, симметрии и ковариантности относительно положительных линейных преобразований.

Однако еще одно известное значение для класса игр (супераддитивных) двух лиц — решение ограниченного эгалитаризма — не имеет