

Van Klokkenmakers en Kettingbreuken

Paul Kersten

email:kerstenphm@ewi.utwente.nl

wwwhome.math.utwente.nl/~kerstenphm

17 april 2004

" De titel van het verhaal is gekozen met de bedoeling om uw aandacht te trekken en tevens om u op het verkeerde been te zetten. De enige *voorkennis* is het vak rekenen."

We waren op vakantie in Frankrijk en ik zat voor de caravan een boek te lezen, echt zo'n lekker plaatjes boek: **Klaus Erbrich, Präzisions - Pendeluhren, von Graham bis Riefler** , en daar zag ik de volgende foto staan:

Een klok met twee wijzerplaten, waarop geschreven **mean solar, sidereal** en gesigneerd **J. Vines, Inv^r; Walsh, Newbury, maker.**

Deze klok is gemaakt in 1836 en staat in het **Science Museum** te **Londen** .

Wat is er aan de hand?

De klok geeft op de

- 1^e wijzerplaat : siderische tijd \equiv *sterretijd* aan
- 2^e wijzerplaat : *middelbare zonnetijd* aan.

Sterretijd:

Je neemt een *ster* waar (op meridiaan/doorgang); de aarde draait rond en de volgende "dag" neem je de *ster* weer waar. Het tijdsverschil tussen deze twee waarnemingen heet:

- een sterredag = 24 (sterre)uren,
- 1 (sterre)uur = 60 (sterre)minuten,
- 1 (sterre)minuut = 60 (sterre)seconden.

Zonnetijd:

Je neemt de *zon* waar (b.v. in het zuiden); de aarde draait rond en de volgende "dag" neem je de *zon* weer waar (in het zuiden) het tijdsverschil noem je een *zonnedag* die weer is onder te verdelen in (zonne)uren, minuten, seconden. Door de baan van de aarde rondom de zon, etc. zijn niet alle zonnedagen even lang en kun je beter uit gaan van een gemiddelde van deze "dag-lengten" *middelbare zonnetijd*.

Wat blijkt nu?

Een middelbare zonnedag blijkt ongeveer 4 minuten langer te zijn dan een sterredag ($360 \times 4 = 1440$ minuten $= 24 \times 60$ minuten $= 1$ dag). Het preciese verschil in seconden (1 minuut $= 60$ seconden) is

236.5553611 seconden per dag.

Dit betekent dat ook een **(zonne-)uur** wat **langer** duurt en dus de middelbare zonneklok wat **langzamer** loopt dan de **sterreklok**.

Sluit je bijvoorbeeld de zonneklok aan op het uurwerk en “ tap” je hiervan de sterretijd af dan dient er een overbrenging te zijn van (1 dag = $24 \times 60 \times 60 = 86400$ seconden)

$$\frac{86400 + 236.5553611}{86400} = \underline{1.002737909} \quad 2719907407$$

Nu stelde Joseph Vines voor:

Laten we voor de verhouding maar nemen:

$$\frac{10621}{10592} = \underline{1.002737915} \quad 4078549849$$

$$\begin{aligned} 10621 &= 247 \times 43 \\ 10592 &= 32 \times 331 \end{aligned}$$

Wat valt nu op:

1. de gekozen verhouding is "niet zo slecht", om het maar eens zwak uit te drukken
2. "Gelukkig" zijn de getallen 10621 en 10592 deelbaar en kunnen we (de klokkenmaker) tandwielen snijden met 247,43,32,331 tanden, hetgeen schematisch het volgende plaatje levert:

Voor de aardigheid:

Wat zou er gebeuren als de klokkenmaker (Walsh dus) zich op vrijdagmiddag “een tandje vergist had” :

$$\frac{246 \times 43}{32 \times 331} = 0.99867 \dots$$

of

$$\frac{247 \times 43}{32 \times 330} = 1.00577 \dots$$

Er blijft niet veel over van de verhouding die hij moest maken. HET BETEKENT DAT JE DAN WERKELIJK NIETS HEBT!!

De vraag is nu: Hoe kwam Vines erbij om de verhouding 10621/10592 te kiezen?

Hij gebruikte kettingbreuken!

Neem eens :

$$\begin{aligned}\frac{131}{51} &= 2 + \frac{29}{51} \\ &= 2 + \frac{1}{\frac{51}{29}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{22}{29}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{29}{22}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{22}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{22}{7}}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7}}}}\end{aligned}$$

We noemen het rijtje $[2, 1, 1, 3, 7]$ de wijzertallen of meer algemeen: $[a_0, a_1, a_2, \dots]$.

Elk rijtje correspondeert met een breuk , die door “oprollen” uit te rekenen is!!

Het blijkt dat dit proces bij onze gewone breuken altijd in een eindig aantal stappen ophoudt.

Dit berust op het “delingsalgorithme van Euclides(nog zo’n kanon)” .

Dit is om even ingewikkeld te doen.

We nemen nu eens het getal dat we eigenlijk wilden!

$$\begin{aligned}
& \text{neem } 1.002737909 \\
& = 1 + 0.002737909 \\
& = 1 + \frac{1}{365.2422341} \\
& = 1 + \frac{1}{365 + \frac{0.2422341283}{1}} \\
& = 1 + \frac{1}{365 + \frac{1}{4.12823745}} \\
& = 1 + \frac{1}{365 + \frac{1}{4 + \frac{0.12823745}{1}}} \\
& = 1 + \frac{1}{365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7.798034023}}} \\
& = 1 + \frac{1}{365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{0.798034023}{1}}}} \\
& = 1 + \frac{1}{365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1.253079406}}}} \\
& = \dots
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (1, 365, 4, 7)$ op de volgende manier breuken

$$\begin{aligned}
 (1) & : 1 & \Rightarrow 1 \\
 (1, 365) & : 1 + \frac{1}{365} & \Rightarrow \frac{366}{365} \\
 (1, 365, 4) & : 1 + \frac{1}{365 + \frac{1}{4}} & \Rightarrow \frac{1465}{1461} \\
 (1, 365, 4, 7) & : 1 + \frac{1}{365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7}}} & \Rightarrow \frac{10621}{10592}
 \end{aligned}$$

De breuken $1, \frac{366}{365}, \dots$ heten “CONVERGENTEN”.

Verdere convergenten zijn

$$\frac{12086}{12053} , \frac{46879}{46751}$$

$$12086 = 2 \times 6043$$

$$12053 = 17 \times 709$$

ontbindingen !

$$46879 = 7 \times 37 \times 181$$

$$46751 = 46751$$

Let op:

6043 en 46751 zijn z.g. priemgetallen en dus niet te herschrijven als producten.

Dus **Joseph Vines** heeft **mazzel** gehad met zijn keuze, want de klokkenmaker kan er “zijn tanden niet meer inzetten”.

Wiskundig ziet de zaak er als volgt uit:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_n + x}}}}$$

$$0 < x < 1$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ heten de wijzergetallen waarbij

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_i}}}} = \frac{P_i}{Q_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

de i^e convergent is.

Er is een **formule** af te leiden,

$$P_{-2} = 0, \quad P_{-1} = 1, \quad P_0 = a_0, \quad P_i = a_i P_{i-1} + P_{i-2},$$

$$Q_{-2} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1, \quad Q_i = a_i Q_{i-1} + Q_{i-2}.$$

Voorbeeld: Neem : 131/51

$$\left| \begin{array}{l} n : \\ a_n : \\ P_n : \\ Q_n : \end{array} \right| \begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 18 \\ 7 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 4 \\ 7 \\ 131 \\ 51 \end{array} \right|$$

De convergenten zijn: $\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{18}{7}, \frac{131}{51}$!

Je kunt ook bewijzen dat

$$\left| \alpha - \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leq \frac{1}{Q_n^2}$$

Zou je de kettingbreuk maken voor $\pi = 3.141592654$ dan vind je de wijzer getallen 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1 en de volgende convergenten

3

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = \underline{3.142\dots}$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}} = \frac{333}{106} = \underline{3.141509434}$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = \underline{3.14159292}$$

Het blijkt dat $\frac{355}{113}$ de breuk was , die in de oudheid al door de Chinezen gebruikt werd als benadering voor π .

Wat hebben we nu gezien?

Het is mogelijk om **moeilijke getallen** met betrekkelijk eenvoudige **breuken** heel goed te **benaderen**, en we hebben gezien dat we deze breuken (zelfs) met de hand kunnen uitrekenen.

We hebben ook gezien dat we met het wiskundige idee van een kettingbreuk een echt **technisch probleem** kunnen oplossen.

De eerste persoon waarvan men weet dat hij kettingbreuken toepaste op een echt technisch probleem, is niemand minder dan **Christiaan Huygens** (1629-1695) die een **Planetarium** ontworpen heeft (een machine waarmee men de loop van de planeten in hun baan om de zon laat zien), waarbij de verschillende omlooptijden van

Mercurius		,	87d	,	23h	,	14m	,	24s
Venus		,	224d	,	17h	,	45m		
Aarde		,	365d	,	6h	,	9m	,	26s
Mars		,	886d	,	23h	,	31m	,	56s
Jupiter	11j	,	317d	,	14h	,	49m	,	31s
Saturnus	29j	,	174d	,	4h	,	58m	,	25s

Huygens gebruikte (of wist dat) de verhouding tussen de omloop van Mercurius en de omloop van de Aarde om de zon, gegeven door

$\frac{25335}{105190}$,
en berekende de wijzergetallen
[0, 4, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 2]!

Vervolgens gebruikte hij in eerste instantie de VIJFDE CONVERGENT :

$$[0, 4, 6, 1, 2, 2] = \frac{33}{137}$$

Later ontdekte hij dat je beter de NEGENDE COVERGENT kon nemen :

$$[0, 4, 6, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1] = \frac{204}{847}$$

$$(204 = 12 * 17; 847 = 7 * 121)$$

De fout in de VIJFDE CONV.is : $3 * 10^{-5}$

De fout in de NEGENDE CONV. is : $2 * 10^{-7}$

Dit planetarium dat in 1682 door de beroemde klokkenmaker **Johannes van Ceulen** gemaakt is, is (nog steeds) te bewonderen in Museum Boerhaave te Leiden.

TOT SLOT

We hebben ons natuurlijk afgevraagd of je maakbare benaderingen kunt vinden die beter zijn (m.b.v. kettingbreukontwikkeling van getallen in de buurt), bijvoorbeeld:

1	$\frac{10621}{10592}$	$\frac{247 \times 43}{32 \times 331}$
2	$\frac{272118}{271375}$	$\frac{2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 19 \times 31}{5 \times 5 \times 5 \times 13 \times 167}$
3	$\frac{759220}{757147}$	$\frac{2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 17 \times 29}{41 \times 59 \times 313}$
4	$\frac{146661317}{146260868}$	$\frac{11 \times 11 \times 23 \times 151 \times 349}{2 \times 2 \times 13 \times 97 \times 107 \times 271}$
5	$\frac{3803059}{3792675}$	$\frac{13 \times 19 \times 89 \times 173}{3 \times 5 \times 5 \times 61 \times 829}$

		factor	
0	1.00273790927		
1	1.002737915	1	1 sec. in 5.2 jaar
2	1.0027379088	12	
3	1.00273790955	22	
4	1.00273790936	67	1 sec. in 400 jaar !!
5	1.00273790926	483	1 sec. in 2500 jaar !!