Kenmerk: TW2000/T-DW/11/dh

Tentamen Discrete Wiskunde voor TW

Maandag 14 augustus 2000, 13.30 – 16.30 uur
vakcode 152061

Motiveer uw antwoorden!

1. De vector $[1 \;\; \lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3]$ ligt in de rijruimte van de volgende (3×4)-matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 2100 & 1 & 0 & 0 \\ 1100 & 0 & 1 & 0 \\ 231 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a. Bewijs dat
   $$1 = \lambda_1 \cdot 2100 \; + \; \lambda_2 \cdot 1100 \; + \; \lambda_3 \cdot 231.$$

   b. Bereken zulke λ_1, λ_2 en λ_3 door vegen met rijen in A (Euclides!).

   Stel nu:
   $$e_1 := \lambda_1 \cdot 2100, \; e_2 := \lambda_2 \cdot 1100 \quad \text{en} \quad e_3 := \lambda_3 \cdot 231.$$

   c. Bewijs m.b.v. a. dat $e_1 \equiv \begin{cases} 1 & (\mathrm{mod}\ 11) \\ 0 & (\mathrm{mod}\ 21) \\ 0 & (\mathrm{mod}\ 100) \end{cases}$
   en geef de overeenkomstige congruentierelaties voor e_2 en e_3.

   d. Bepaal nu één oplossing x in $\mathbb{Z}$ met $0 \leq x < 23100$,
   die voldoet aan $x \equiv \begin{cases} 8 & (\mathrm{mod}\ 11) \\ 5 & (\mathrm{mod}\ 21) \\ 56 & (\mathrm{mod}\ 100) \end{cases}$

2. a. Bepaal het aantal natuurlijke getallen van 8 cijfers, die te vormen zijn uit één keer $2, 3, 4$ en 5 en vier keer 1.

   b. Als a., maar nu mogen geen twee enen naast elkaar staan.

3. Op $\mathbb{Z}$ definiëren we een relatie $\sim$ door:
$$x \sim y \Leftrightarrow \sin(x\pi/2) = \sin(y\pi/2).$$

   a. Bewijs dat $\sim$ een equivalentierelatie is op $\mathbb{Z}$.

   b. Bepaal, expliciet, de bijbehorende equivalentieklassen.

4. Stel $n = p_1^{e_1}\, p_2^{e_2}\, \ldots\, p_r^{e_r}$ met $r \geq 1$ en $e_i \geq 1$ voor $i = 1, 2, \ldots, r$ en p_1 t/m p_r verschillende priemgetallen.

   a. Druk $\varphi(n)$ uit in n en zijn priemdelers p_i.

   b. Druk $\mu(n)$ uit in r als $e_i = 1$ voor $i = 1, 2, \ldots, r$.

   c. Bereken nu $\varphi(100)$ en controleer uw resultaat m.b.v. het zeefprincipe.

   d. Bepaal de laatste twee decimalen van x^{40}, als x een oneven laatste decimaal $\neq 5$ heeft.

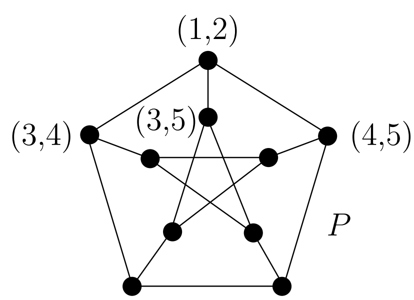
5. V is de verzameling van alle transposities uit S_n (de verzameling van alle permutaties van $\mathbb{N}_n$). Door twee punten (a, b) en (c, d) uit V door een lijn te verbinden d.e.s.d. als $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, ontstaat een graaf G op V.

   a. Stel $(a, b), (c, d) \in V$ met $(a, b) \neq (c, d)$.
   Bewijs: $[(a, b)$ en (c, d) zijn geen buren in $G] \Rightarrow [(a, b)(c, d) \neq (c, d)(a, b)]$.

   b. Bereken m en k en het aantal lijnen van G.

   Stel nu $n = 5$.

   c. Label al de punten van de onderstaande Petersengraaf P met de elementen van V zó, dat een tekening van G onstaat.



Normering:

1.a.	:	2	2.a.	:	2	3.a.	:	2	4.a.	:	1	5.a.	:	2
b.	:	3	b.	:	2	b.	:	2	b.	:	1	b.	:	2
c.	:	1							c.	:	2	c.	:	2
d.	:	2							d.	:	2			

Totaal: 27+3 = 30 punten.