

## Tentamen Lineaire Analyse voor TN (151024)

Woensdag 16 augustus 2000, 9.00 – 12.00 uur

Motiveer uw antwoorden; rekenmachine niet toegestaan

1. Zij  $W = P_2$ , de lineaire ruimte van de reële polynoomfuncties van de graad  $\leq 2$ , voorzien van het inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) x dx.$$

$A : W \rightarrow W$  is gegeven door  $(Af)(x) = f(a - x)$ , met  $a$  een reële parameter. De lineaire deelruimte  $V = \langle 1, x \rangle$  is voorzien van “hetzelfde” inproduct.

- Bewijs dat  $A$  een lineaire afbeelding is en bepaal zijn matrix  $[A]$  m.b.t. de basis  $\{1, x, x^2\}$  van  $W$ .
  - Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenruimtes van  $[A]$  en van  $A$ .
  - Bepaal een matrix  $P$  zó dat  $P^{-1}[A]P$  een diagonaalmatrix  $D$  is en geef deze  $D$  (met toelichting).
  - Bepaal met “Gram-Schmidt”, uitgaande van  $\{1, x\}$ , een orthonormale basis van  $V$ .
  - Bepaal die waarde(n) van  $a$  waarvoor de beperking van  $A$  tot  $V$  zelfgeadjungeerd is.
2. Zij  $A : L \rightarrow L$  (met complex inproduct  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ) een unitaire lineaire afbeelding;  $\dim(L) < \infty$ . Laten  $\lambda$  en  $\mu$  eigenwaarden van  $A$  zijn met  $\lambda \neq \mu$ .
- Bewijs:  $|\lambda| = |\mu| = 1$  (**Theorievraag**).
  - Bewijs:  $E_\lambda \perp E_\mu$ .
  - Bewijs dat  $Y := (A - A^*)/(2i)$  zelfgeadjungeerd is op  $L$ .

3. Stel  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

- Bepaal een reguliere matrix  $P$  zó dat  $P^{-1}AP$  een Jordan-normaalvorm  $J$  heeft en geef deze  $J$ .
- Bepaal  $\exp(Jt)$  en daaruit  $\exp(At)$ .

4.  $H$  is de reële Hilbertruimte  $L_2((0, \infty))$  met inproduct

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)dx.$$

en maximaal orthonormaal stelsel  $e_0, e_1, e_2, \dots$  gegeven door

$$e_n(x) = \frac{e^{x/2}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Zij  $a, s \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , en  $f_s : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door  $f_s(x) = e^{-sx}$ .

- a. Bewijs dat  $f_s \in H \Leftrightarrow s > 0$  en bereken  $\|f_s\|$ , voor  $s > 0$ .
- b. Bewijs, door herhaaldelijke partiële integratie, dat, voor  $s > 0$ ,

$$\langle f_s | x^n \rangle = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Eveneens is door herhaaldelijke partiële integratie te bewijzen dat

$$\langle f_{a/2} | e_n \rangle = \frac{(a-1)^n}{2^n n!} \int_0^\infty e^{-x(a+1)/2} x^n dx.$$

- c. Geef nu, expliciet, de Fourierreeks van  $f_{a/2}$  t.a.v.  $e_0, e_1, e_2, \dots$ ; klopt uw resultaat ook voor  $a = 1$ ?
- d. Formuleer de gelijkheid van Parseval en bewijs daaruit dat

$$\frac{(a+1)^2}{4a} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{a-1}{a+1} \right)^{2n}.$$

**Normering:**

1.a.	: 3	2.a.	: 3	3.a.	: 3	4.a.	: 2
b.	: 4	b.	: 2	b.	: 4	b.	: 2
c.	: 2	c.	: 2			c.	: 2
d.	: 3					d.	: 2
e.	: 2						

**Totaal:** 36+4 = 40 punten.