Een Zebra-boekje
'Grafen in de Praktijk'

Hajo Broersma
Faculteit der Toegepaste Wiskunde
Universiteit Twente

m.m.v.
Eugene Welling, Henri Ruijzenaar,
Arjan Hakkert, Hans Wrekenhorst,
Agaath van den Ende, Judith Krabbenbos,
Marijke Vallentgoed en vele VWO-leerlingen.

Studiedag VWO-UT
Echogroep, 18 april 2000.

Inhoud

– Inleiding

– Drie onderwerpen:

  * *praktijk*: mobiele communicatie
    theorie: graafkleuring

  * *praktijk*: goedkope netwerken
    theorie: min. opspannende bomen

  * *praktijk*: snelle comm. kanalen
    theorie: kortste paden

Mobiele Communicatie

- Zenders (en ontvangers)

- Draadloze verbindingen

- Frequenties

- Zenders met/zonder overlap

Een eenvoudig voorbeeld

Vijf zendmasten

- Elke zender één frequentie
- Overlapp. zenders verschill. frequenties
- Zo weinig mogelijk frequenties

Een algemeen model

- Graaf $G = (V, E)$

- V is de puntenverzameling: één punt per zender

- E is de lijnenverzameling: alleen de paren overlappende zenders geven een lijn

- $\chi(G)$ is het kleinste aantal kleuren waarvoor G een kleuring heeft, waarbij elk punt één kleur krijgt en buren verschillende kleuren

Het minimale aantal frequenties dat nodig is om overlappende zenders verschillende frequenties te geven, is precies $\chi(G)$ van de bijbehorende graaf G.

Oplossingsstrategieën

– Geen snelle methode voor het bepalen van $\chi(G)$ bekend of waarschijnlijk

– Heuristieken op basis van een volgorde van de punten

– Criteria vaak op basis van de graden van de punten, d.w.z. het aantal buren

– In de praktijk redelijke resultaten

Voorbeelden: punten met hoogste graad laatst, punten met laagste graad eerst, en combinaties. Deze methodes leiden in ieder geval tot een kleuring met hooguit $\Delta(G) + 1$ kleuren, waarbij $\Delta(G)$ de grootste graad is.

Exacte oplossing via chromatische polynomen

Definieer $\pi_k(G)$ als het aantal verschillende k-kleuringen van een graaf G.

- als $k < \chi(G)$, dan geldt $\pi_k(G) = 0$;
- als $\pi_k(G) > 0$, dan is ook $\pi_{k+1}(G) > 0$;
- $\chi(G)$ is de kleinste gehele waarde van k waarvoor geldt dat $\pi_k(G) > 0$.

De functie $\pi_k(G)$ blijkt altijd van de vorm:

$$k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0,$$

waarin n het aantal punten van G is.
Daarom heet $\pi_k(G)$ het *chromatisch polynoom* van G. Een mooie eigenschap is verder, dat $-a_{n-1}$ altijd precies het aantal lijnen van G is.

Een recursie-formule

Als $e = v_1 v_2$ een lijn van G is, dan is:

- $G - e$ de graaf die uit G verkregen wordt door de lijn e te verwijderen en
- $G.e$ de graaf die uit $G - e$ verkregen wordt door de punten v_1 en v_2 *samen te trekken*

Voor elke graaf G en elke lijn e van G geldt:

$$\pi_k(G) = \pi_k(G - e) - \pi_k(G.e).$$

Goedkope Netwerken

– Een verzameling computers

– Mogelijke links

– Kosten of capaciteiten per link

– Onderlinge communicatie mogelijk

Een eenvoudig voorbeeld

Computers met mogelijke links

– Samenhangend netwerk

– Kiezen uit mogelijke links

– Zo goedkoop mogelijk

Een algemeen model

- Graaf $G = (V, E)$

- V is de puntenverzameling: één punt per computer

- E is de lijnenverzameling

- Voor elke lijn $e \in E$ is er een gewicht $w(e)$

Het goedkoopste netwerk komt overeen met een opspannende boom T van G zodanig dat $w(T)$, de som van de gewichten van de lijnen in T, zo laag mogelijk is.
Een bekende oplosmethode hiervoor is het Algoritme van Kruskal.

Snelle Communicatiekanalen

- Een verzameling computers
- Bestaande links
- Verwerkingstijden per link
- De snelste communicatie tussen A en B

Een eenvoudig voorbeeld

Computers en links

- Pad tussen A en B
- Kiezen uit bestaande links
- Zo snel mogelijk

Een algemeen model

- Graaf $G = (V, E)$

- V is de puntenverzameling: één punt per computer

- E is de lijnenverzameling

- Voor elke lijn $e \in E$ is er een gewicht $w(e)$

De snelste communicatie tussen A en B gaat via een pad P tussen A en B in G zodanig dat $w(P)$, de som van de gewichten van de lijnen in P, zo laag mogelijk is.
Een bekende oplosmethode hiervoor is het Algoritme van Dijkstra.